Stuvelの指数をめぐって

中　山　慶一郎

1．はじめに

経済統計の分野で古くて新しい問題である指数算式の問題について、本稿ではStuvel[1,2] の新しい指数算式をとりあげ、その性格及び問題点を論じようとするものである。指数の問題は伝統的に物価指数について発展してきているので、本稿も物価指数の側面についてとりあげることにする。

2．物価指数論について

物価指数論には形式的・統計的接近と経済理論的接近とがあげられる。統計的接近のジャンルにおいて代表的な文献はフィッシャーの指数理論が知られている。その後の研究では消費者選好の理論に基づく物価指数の限界理論、又は貨幣効用の弾力性概念の応用、更に効用関数から物価指数の導出へと移っている。Stuvelの指数は形式的な指数論に基づくものである。多くのテストに合格する算式である「理想算式」を導いたフィッシャーは指数算式の満すべき形式的条件として8つの条件を示したが、重要な条件として三つの転逆テストをあげている。その一つは、商品転逆テスト（commodity reversal test）であり、第二は時点転逆テスト（time reversal test）で、第三は要素転逆テスト（factor reversal test）である。フィッシャーは指数算式がこれらのテストに合格しないことから、ライパイレス式（L式）とパーシェ式（P式）の幾何平均F式を導き多くのテストに合格する算式として採用し「理想算式」(ideal formula）と名づけた。

ステューベルは金額（value）における相対変動が価格変動と数量変動に対称的に分割されることに注目する。この価格変動と数量変動が偏よりを持つので、この偏よりを除去するために平均して算式を導いた。この算式は形式的に優れたもので、2時点間の多くの指数テストに合格するものである。

3．Stuvel 指数

基準時点での第i財の価格を P_0^i、数量を Q_0^i とし、比較時点での第i財の価格を P_1^i、数量を Q_1^i とすれば、この2時点の購入金額は，$V_0^i=Q_0^i P_0^i$、$V_1^i=Q_1^i P_1^i$ となる。また、ラスパイレス物価指数 P_L、数量指数 Q_L、パーシェ物価指数 P_P、数量指数 Q_P 及び金額指数 V は次のように表わされる。

$$P_L=\frac{\sum_i P_1^i Q_0^i}{\sum_i Q_0^i P_0^i}=\frac{\sum P_1 Q_0}{\sum P_0 Q_0}, \quad Q_L=\frac{\sum_i P_0^i Q_1^i}{\sum_i P_0^i Q_0^i}=\frac{\sum P_0 Q_1}{\sum P_0 Q_0}$$

$$P_P=\frac{\sum_i P_1^i Q_1^i}{\sum_i P_0 Q_1^i}=\frac{\sum P_1 Q_1}{\sum P_0 Q_1}, \quad Q_P=\frac{\sum_i P_1^i Q_1^i}{\sum_i P_1^i Q_0^i}=\frac{\sum P_1 Q_1}{\sum P_1 Q_0}$$

$$V=\frac{\sum_i P_1^i Q_1^i}{\sum_i P_0^i Q_0^i}=\frac{\sum P_1 Q_1}{\sum P_0 Q_0}, \quad V=P_L Q_P=P_P Q_L$$

スチューベルは金額の変化を加法と乗法を用いて表現する。

いま第i財の2時点の金額の差を2項の和として二通りの表現を行う。

$$V_1^i-V_0^i=(Q_1^i P_1^i-Q_0^i P_1^i)+(Q_0^i P_1^i-Q_0^i P_0^i) \tag{1}$$

$$V_1^i-V_0^i=(Q_1^i P_0^i-Q_0^i P_0^i)+(Q_1^i P_1^i-Q_1^i P_0^i) \tag{2}$$

(1)、(2)を財について総和をとると，

$$\sum_i V_1^i-\sum_i V_0^i=(\sum_i Q_1^i P_1^i-\sum_i Q_0^i P_1^i)+(\sum_i Q_0^i P_1^i-\sum_i Q_0^i P_0^i) \tag{1$'$}$$

$$\sum_i V_1^i-\sum_i V_0^i=(\sum_i Q_1^i P_0^i-\sum_i Q_0^i P_0^i)+(\sum_i Q_1^i P_1^i-\sum_i Q_1^i P_0^i) \tag{2$'$}$$

(1)′、(2)′ を $\sum_i V_0^i=\sum_i Q_0^i P_0^i=\sum Q_0 P_0$ で割った相対変動にすると、

$$V-1=(V-P_L)+(P_L-1)=P_L(Q_P-1)+(P_L-1) \tag{3}$$

$$V-1=(Q_L-1)+(V-Q_L)=(Q_L-1)+Q_L(P_P-1) \tag{4}$$

(3)、(4)は金額の変動を価格部分と数量部分に分割した場合を各々に示している。これらの価格部分、数量部分は一方に偏よっているので、(3)、(4)を平均して、一般的な相対変動の表現として、

$$V-1=\frac{1}{2}(V-P_L+Q_L-1)+\frac{1}{2}(V-Q_L+P_L-1) \tag{5}$$

となる。

ステューベルは金額の変化を加法（the form of ad ditive of relative value changes）と乗法（the multiplicative of rel ative value changes）を用いて表現する。

P、Q、V を一般的な物価、数量、金額指数を表わすとして、乗法 PQ=V を用いた金額の変化は、

$$V-1=P-1+(Q-1)P \tag{7}$$

$$V-1=Q-1+(P-1)Q \tag{8}$$

(5)と同様に、(7)と(8)を平均して、

$$\begin{aligned} V-1 &= \frac{1}{2}(P-1)(Q+1)+\frac{1}{2}(Q-1)(P+1) \\ &= \frac{1}{2}(PQ+P-Q-1)+\frac{1}{2}(PQ-P+Q-1) \end{aligned} \tag{9}$$

(9)の P、Q は $Q_LQ_L \fallingdotseq V$ であるので、$P \fallingdotseq P_L$、$Q \fallingdotseq Q_L$ である。そこでステューベルは、(9)と(5)を比較して、

$$PQ=V \tag{10}$$

$$P-Q=P_L-Q_L \tag{11}$$

を満たす P、Q を求めた。

$$P-Q=P_L-Q_L$$

に、PQ=V から P=V/Q を上式に代入して、

$$\frac{V}{Q}-Q=P_L-Q_L$$

従って、

$$Q^2-[Q_L-P_L]Q-V=0$$

これから、

$$Q=\frac{1}{2}\left[(Q_L-P_L)+\sqrt{(Q_L-P_L)^2+4V}\right] \tag{12}$$

同様にして、

$$P=\frac{1}{2}\left[(P_L-Q_L)+\sqrt{(P_L-Q_L)^2+4V}\right] \tag{13}$$

が導出される。

Stuvel の指数は、数量指数 Q_S、価格指数 P_S は、

$$Q_S=(Q_L-P_L+R)/2 \tag{14}$$

$$P_S=(P_L-Q_L+R)/2 \tag{15}$$

$$R=\sqrt{(Q_L-P_L)^2+4V} \tag{16}$$

となる。Stuvel の指数はラスパイレス、パーシェの数量、価格変動の偏よりを除くために導入された。また、総合商品の金額変動の加法分析と乗法分析をまとめる特徴を持っている。

4．Stuvel 指数の性質

Stuvel の指数は Fisher によるテストにすべて合格するが、ここでは要素転逆テスト（factov reversal test）と時点転逆テスト（time reversal test）をとりあげる[1].

$$P_SQ_S=\left(\frac{P_L-Q_L+R}{2}\right)\left(\frac{Q_L-P_L+R}{2}\right)=V \tag{17}$$

1) Stuvel が取りあげたテストとして、他に Aggregation（加法性）、Equality（同一性）、Withdrawal and entry（除去・挿入性）、Proportionality（比例性）、Identity（識別性）、Determinatenous（決定性）、Comnensurability（単位無差別性）がある。

となり、このテストの要求を満たす。一方、時点転逆テストは $I_{01}=\dfrac{1}{I_{10}}$ なることを要求する。

$P_L=\dfrac{\Sigma P_1Q_0}{\Sigma P_0Q_0}$ であるので $\dfrac{\Sigma P_0Q_1}{\Sigma P_1Q_1}=\dfrac{1}{P_P}$

Q_L の代りに $\dfrac{1}{Q_P}$、V の代りに $\dfrac{1}{V}$ を用いて、

$P_S=\dfrac{1}{2}[(P_L-Q_L)+\sqrt{(P_L-Q_L)^2+4V}]$ に対して、

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{P_P}-\frac{1}{Q_P}\right)+\sqrt{\left(\frac{1}{P_P}-\frac{1}{Q_P}\right)^2+\frac{4}{V}}\right.$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{Q_L}{V}-\frac{P_L}{V}\right)+\sqrt{\left(\frac{Q_L}{V}-\frac{P_L}{V}\right)^2+\frac{4}{V}}\right.=\frac{Q_S}{V}$$

従って、$P_S\cdot\dfrac{Q_S}{V}=1$ (18)

となって、この要件を満たす。フィッシャーはこれらのテストを満たす算式として彼の「理想算式」を導いた。ステューベルの算式もその点では類似した算式と言えよう。Stuvel が強調するテストに加法性テスト（aggregation test）がある。L 式、P 式はこのテストに合格しない。いま、全体を 2 つの指数の和になる場合を考えると、

$\Sigma p_0q_0=\Sigma' p_0q_0+\Sigma'' p_0q_0$, $\Sigma p_1q_1=\Sigma' p_1q_1+\Sigma'' p_1q_1$ となり,

$\dfrac{\Sigma' p_0q_0}{\Sigma p_0q_0}=w'$, $\dfrac{\Sigma'' p_0q_0}{\Sigma p_0q_0}=w''$ とすれば、

$$w'V'+w''V''=\frac{\Sigma' p_0q_0}{\Sigma p_0q_0}\cdot\frac{\Sigma' p_1q_1}{\Sigma' p_0q_0}+\frac{\Sigma'' p_0q_0}{\Sigma p_0q_0}\cdot\frac{\Sigma'' p_1q_1}{\Sigma'' p_0q_0}$$

$$=\frac{\Sigma' p_1q_1+\Sigma'' p_1q_1}{\Sigma p_0q_0}=\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0}=V$$

同様に、

$P_L=w'P_L'+w''P_L''$, $Q_L=w'Q_L'+w''Q_L''$

$P_L-Q_L=w'(P_L'-Q_L')+w''(P_L''-Q_L'')$

P_S、Q_S は $P_L-Q_L\geq V$ によって構成されるので、Stuvel の指数は加法性テス

トを満たす。加法性のテストは指数の経済理論との関連に役立つものと考えられる。

5．物価指数変動の限界理論とボルトキービッツの公式

物価指数の経済理論的研究は指数算式の経済的意味を考える上において重要である。物価水準変動の限界理論によれば、物価水準を基準時点と比較時点の変動について比較すると、ラスパイレス式およびパーシェ式が物価水準の上下の限界を示す。

ハーバラ・コニュスによれば、ラスパイレス式は、基準時点の消費水準を用いて物価水準の上限を規定し、パーシェ式が比較時点の消費水準を用いて物価水準の下限を定める。

すなわち、

$$P_L^{01} \geq P^{01}(I_0) = \frac{E_1(q_0)}{E_0(q_0)}, \quad P_P^{01} \leq P^{01}(I_1) = \frac{E_1(q_1)}{E_0(q_1)} \tag{20}$$

$E_0(q_0)$ は消費水準 q_0 での 0 時点の費用である。この関係式は物価水準の比較を基準時点と比較時点との消費内容に基づくのであるので実践的でない。シュテーレは 2 つの不等式が同時に成り立つための条件として、

$$E_0(q_1) = E_0(q_0), \quad E_1(\bar{q}_0) = E_1(q_1)$$

を導入して､近似的に

$$P_L^{01} > P^{01}(I_0) > P_P^{01} \tag{21}$$

$$\bar{P}_L^{01} > P_{01}(I_1) > P_P^{01} \tag{22}$$

が成立することを示した[2)]。

実際的な判断基準で考えるならば限界理論によれば、比較的近接する時点をとって、同一所得階級の消費を比較する時に、ラスパイレス式とパーシェ式とはそれぞれこの所得階級に対する物価水準の変動位置の上下の限界を示しているものとすることができる。

ボルトキービッツ（Bortkiewicz, 1922－24）によれば、ラスパイレス式とパ

2）詳しくは文献〔5〕第 4 章物価水準変動の限界理論を見よ。

ーシェ式との相対差は次式によって定められる。

$$\frac{P_P - P_L}{P_L} = \gamma_{pq} \frac{s_p}{P_L} \frac{s_q}{Q_L} \tag{23}$$

ここで P_L、P_P はラスパイレス、パーシェ式による物価指数、Q_L はラスパイレス式による数量指数、s_p、s_q はそれぞれ価格変動率、数量変動率の加重標準偏差、γ_{pq} は両者の加重相関係数である。

このボルトキービッツの式を用いると、物価水準の上限と下限を表わすギャップを説明することができる。

6. 循環テストと消費構造の変化

時点転逆テストは2つの時点について基準を置き換えて、互いに逆数の関係にあることであるが、同様の事柄を三つ以上の時点の関係についても考えることができる。

いま、三つの時点を0、1、2とすれば,

$$P^{01} \cdot P^{12} = P^{02} \quad 又は \quad \frac{P^{01} \cdot P^{12}}{P^{02}} = 1 \tag{24}$$

となる条件を満す指数は循環テスト（circular test）を満すという。

指数算式のなかで循環テストを満すものは少なくフィッシャーの「理想算式」もこの条件に合格しないし、ステューベルの算式も、この条件には不合格である[3)]。

ここでは、三つの時点における消費構造の変化を Bortkiewicz の式を用いて分析することにしよう。ラスパイレス物価指数 P_L とパーシェ物価指数 P_P の0時点と1時点の相対ギャップ g^{01} とすると、

$$g^{01} = \frac{P_P^{01} - P_L^{01}}{P_L^{01}} = \gamma_{\omega 0}(x, y) \frac{s_{\omega 0}(x)}{P_L} \cdot \frac{s_{\omega 0}(y)}{Q_L} \tag{25}$$

となる。

3) 循環テストを満足するものとして、単純幾可平均、単純総和指数，固定ウェートによる加重幾可平均、固定ウェート加重総和指数などがある。

いま、$x^i=\dfrac{q_1^i}{q_0^i}$, $y^i=\dfrac{p_1^i}{p_0^i}$, $w_0^i=p_0^iq_0^i$とする。

ただし、q_0^i、q_1^iは0時点及び1時点の第i品目の数量、p_0^i, p_1^iは0時点及び1時点の第i品目の価格である。

$$\mathrm{Cov}_{w0}(x,y)=\overline{xy}-\bar{x}\,\bar{y}$$

$$\bar{x}=\frac{\sum w_0^i x^i}{\sum w_0^i}=\frac{\sum p_0q_0\dfrac{q_1}{q_0}}{\sum p_0q_0}=\frac{\sum p_0q_1}{\sum p_0q_0}=Q_L^{01}$$

$$\bar{y}=\frac{\sum w_0^i y^i}{\sum w_0^i}=\frac{\sum p_0q_0\dfrac{p_1}{p_0}}{\sum p_0q_0}=\frac{\sum p_0q_1}{\sum p_0q_0}=P_L^{01}$$

$$\overline{xy}=\frac{\sum w_0^i x^i y^i}{\sum w_0^i}=\frac{\sum p_0q_0\dfrac{p_1q_1}{p_0q_0}}{\sum p_0q_0}=\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0}=V^{01}$$

$$V^{01}=Q_L^{01}P_P^{01}=Q_P^{01}P_L^{01}$$

従って、

$$\mathrm{Cov}_{w0}(x,y)=V^{01}-Q_L^{01}P_L^{01}=Q_L^{01}(P_P^{01}-P_L^{01})=P_L^{01}(Q_P^{01}-Q_L^{01}) \tag{26}$$

$$s_{w0}^2(x)=\frac{\sum w_0^i(x^i-Q_L)^2}{\sum w_0^i}$$

$$s_{w0}^2(y)=\frac{\sum w_0^i(y^i-P_L)^2}{\sum w_0^i}$$

$$V_{w0}(x,y)=\frac{\mathrm{Cov}_{w0}(x,y)}{s_{w0}(x)s_{w0}(y)}$$

となるから、

$$g^{01}=\frac{\mathrm{Cov}_{w0}(x,y)}{P_L^{01}Q_L^{01}}=\frac{P_P^{01}-P_L^{01}}{P_L^{01}} \tag{27}$$

となる。

次に、

$$x^i=\frac{q_2^i}{q_1^i},\quad y^i=\frac{p_2^i}{p_1^i},\quad w_1^i=p_1^i q_1^i$$

とおけば、

$$\overline{xy}=\frac{\sum w_1^i \frac{p_2^i q_2^i}{p_1^i q_1^i}}{\sum w_1^i}=\frac{\sum p_1 q_1 \frac{p_2 q_2}{p_1 q_1}}{\sum p_1 q_1}=\frac{\sum p_2 q_2}{\sum p_1 q_1}=V^{12}$$

$w_{01}=p_0^i q_1^i$とすれば、

$$\bar{x}=\frac{\sum w_{01}^i \frac{q_2^i}{q_1^i}}{\sum w_{01}^i}=\frac{\sum p_0 q_1 \frac{q_2}{q_1}}{\sum p_0 q_1}=\frac{\sum p_0 q_2}{\sum p_0 q_1}=Q_L^{12.0}$$

$w_{10}^i=p_1^i q_0^i$とすると、

$$\bar{y}=\frac{\sum w_{10}^i \frac{p_2^i}{p_1^i}}{\sum w_{10}^i}=\frac{\sum p_1 q_0 \frac{p_2}{p_1}}{\sum p_1 q_0}=\frac{\sum p_2 q_0}{\sum p_1 q_0}=P_L^{12.0}$$

$$\mathrm{Cov}_w(x,y)=V^{12}-Q_L^{12.0}P_L^{12.0} \tag{29}$$

ここで、

$$P_P^{12.0}=\frac{P_P^{02}}{P_P^{01}}=\frac{\dfrac{\sum p_2 q_2}{\sum p_0 q_2}}{\dfrac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}}=\frac{\dfrac{\sum p_2 q_2}{\sum p_1 q_1}}{\dfrac{\sum p_0 q_2}{\sum p_0 q_1}}=\frac{V^{12}}{Q_L^{12.0}} \tag{30}$$

$$Q_P^{12.0}=\frac{Q_P^{02}}{Q_P^{01}}=\frac{\dfrac{\sum p_2 q_2}{\sum p_2 q_0}}{\dfrac{\sum p_1 q_1}{\sum p_1 q_1}}=\frac{\dfrac{\sum p_2 q_2}{\sum p_1 q_1}}{\dfrac{\sum p_2 q_0}{\sum p_1 q_0}}=\frac{V^{12}}{P_L^{12.0}} \tag{31}$$

が成立するので、

$$V^{12}=Q_L^{12.0}P_P^{12.0}=P_L^{12.0}Q_P^{12.0}$$

である。従って、

$$\mathrm{Cov}_w(x,y)=Q_L^{12.0}(P_P^{12.0}-P_L^{12.0})=P_L^{12.0}(Q_P^{12.0}-Q_L^{12.0}) \tag{32}$$

基準時点0をウェイトにしたときの、1時点と2時点のL式とP式の物価指数の相対ギャップを $g^{12.0}$ とすれば、

$$g^{12.0}=\frac{P_P^{12.0}-P_L^{12.0}}{P_L^{12.0}}=\frac{Cov_w(x,y)}{Q_L^{12.0}P_L^{12.0}} \tag{33}$$

で与えられる。

g^{12} は1時点と2時点間のL式とP式の相対ギャップを示し、ウェイトは1時点である。$g^{12.0}$ は0時点をウェイトにしたときの1時点と2時点間の相対ギャップである。

もし、消費構造が不変であるならば、g^{12} と $g^{12.0}$ はほぼ等しいと考えられるが、0時点と1時点の消費構造が異なるときは、g^{12} と $g^{12.0}$ は等しくなく、$g^{12.0}>g^{12}$ のときは消費構造の変動が起こった可能性があると判断しうる場合である。この場合は指数の基準の変更を行ってみるのが実際の指数を作成する一つの方針になるのではないかと思う。

7. 終りに

本稿は Stuvel の指数の紹介とそれに関連した議論を展開したものである。Stuvel の指数は形式的に見れば優れた指数の一つであろう。また実用的でもある。その長所は Fisher の理想算式とほぼ同じであるが、aggregation test を満す点に今後の発展する可能性があろう。

現実の指数の利用について、ここでの提案は経済理論的検討と実際のデータによる検証が必要であるが、この点については別の機会としたい。

参考文献

〔1〕 Stuvel, G. (1989), *The Index-Numher Problem and its Solution,* Macmillom.

〔2〕 Stuvel, G, (1957), "A New Index Numleer Formula", *Econometrica,* 25.

〔3〕 Yzeren, J. van. (1958), "A Note on the the Useful Properties of Stuvels Index Numhers", *Econometrica,* 26.

〔4〕 時子山和彦 (1978), 消費者物価指数理論の展望, 経済研究, 29.

〔5〕 森田優三 (1989), 物価指数理論の展開, 東洋経済新報社.