ある数理モデルの誕生

「意思決定過程モデル」の構築に関する「プロセス提示型論文」(2)†

海　野　道　郎††

§8　均質社会基本モデルの解法

ここで，均質社会基本モデル（7．9）式の解を求めよう。すなわち（7．9）から出発して，$x_{i,t}$を，パラメーター（すなわち，初期値の集合$\{x_{i,o}\}$とa，n）によって表現するのである。

まず初めに，（7．9）を次のように書きかえよう。

$$x_{i,t} = \mathrm{A}\,x_{i,t-1} + \mathrm{B} \tag{8.1}$$

ここで，

$$\mathrm{A} = \frac{na-1}{n-1} \tag{8.2}$$

$$\mathrm{B} = (1-a)\frac{n}{n-1}\bar{x}_o \tag{8.3}$$

である。

ところで，初期値$\{x_{i,o}\}$，非同調係数a，社会の成員数nを一定にした時には，AとBは定数である。したがって，（8．1）は，最も単純な差分方程式である。そこで，次のようにして解が求められる。

（8．1）から，

$$x_{i,1} = \mathrm{A}\,x_{i,o} + \mathrm{B}$$

$$\begin{aligned} x_{i,2} &= \mathrm{A}\,x_{i,1} + \mathrm{B} \\ &= \mathrm{A}(\mathrm{A}\,x_{i,o} + \mathrm{B}) + \mathrm{B} \\ &= \mathrm{A}^2 x_{i,o} + \mathrm{B}(\mathrm{A}+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{i,3} &= \mathrm{A}\,x_{i,2} + \mathrm{B} \\ &= \mathrm{A}\{\mathrm{A}^2 x_{i,o} + \mathrm{B}(\mathrm{A}+1)\} + \mathrm{B} \\ &= \mathrm{A}^3 x_{i,o} + \mathrm{B}(\mathrm{A}^2 + \mathrm{A} + 1) \end{aligned}$$

同様にして

$$x_{i,t} = \mathrm{A}^t x_{i,o} + \mathrm{B}(\mathrm{A}^{t-1} + \mathrm{A}^{t-2} + \cdots + \mathrm{A} + 1) \tag{8.4}$$

ところで，定義より$0 \leqq a \leqq 1$ゆえ，

$$-1 \leqq na-1 \leqq n-1$$

$$\therefore\ -\frac{1}{n-1} \leqq \frac{na-1}{n-1} \leqq 1 \tag{8.5}$$

また，$n \geqq 2$ゆえ，

$$-\frac{1}{n-1} \geqq -1 \tag{8.6}$$

ゆえに，（8．5），（8．6）より，

$$\left|\frac{na-1}{n-1}\right| \leqq 1 \tag{8.7}$$

よって，（8．2），（8．7）より，

$$|\mathrm{A}| \leqq 1 \tag{8.8}$$

したがって[1)]

$$1 + \mathrm{A} + \mathrm{A}^2 + \cdots + \mathrm{A}^{t-1} = \frac{1-\mathrm{A}^t}{1-\mathrm{A}} \tag{8.9}$$

---

† 本稿は，（海野，1981 d）の続稿である。なお，本稿に関するすべての通信は，下記に寄せられたい。
（〒 662）西宮市上ケ原1－1－155　関西学院大学社会学部　海野道郎

†† 関西学院大学社会学部助教授

（1）正しくは，（8．4）から（8．9）を導びくには，何の仮定・条件も必要でない。（8．9）式は，いかなるAに対しても成り立つからである。ここで｜A｜≦1を導びいたりしたのは，後に気づいたのだが，無限級数の収束条件と混同したのである。

ゆえに，(8.4)と(8.9)より，$x_{i,t}$は次のようになる。

$$x_{i,t}=A^t x_{i,o}+\frac{B(1-A^t)}{1-A} \tag{8.10}$$

ところが，(8.2)，(8.3)より，

$$1-A=1-\frac{na-1}{n-1}=(1-a)\frac{n}{n-1}=\frac{B}{\overline{x}_o} \tag{8.11}$$

したがって，(8.10)，(8.11)より，

$$x_{i,t}=A^t x_{i,o}+(1-A^t)\,\overline{x}_o \tag{8.12}$$

この式に(8.2)，(8.3)を代入すると，

$$x_{i,t}=\left(\frac{na-1}{n-1}\right)^t x_{i,o}+\left\{1-\left(\frac{na-1}{n-1}\right)^t\right\}\overline{x}_o \tag{8.13}$$

となる。(8.13)が，**均質社会基本モデルの解**である。

(8.13)を用いると，$t\to\infty$のときの$x_{i,t}$の収束値は，次のように求められる。まず，(8.13)から，

$$x_{i,t}=\overline{x}_o+\left(\frac{na-1}{n-1}\right)^t(x_{i,o}-\overline{x}_o) \tag{8.14}$$

となる。ところが，この(8.14)は，既に求めた(7.10)と同値である。したがって，(7.10)以下で述べたのと同じ議論が成立する。

われわれは(7.9)において，$x_{i,t}$が$\overline{x}_o$に収束するという予測があったために(7.10)式を導びいたのであるが，ここで示した方法のほうが常道である。

§9　基本モデルの解法

次に，各成員の非同調係数がそれぞれ異なる場合，すなわち，基本モデル(7.6)式の解法を考えてみよう。

§9.1.　逐次計算による法則性の発見

(7.6)式において

$$A_i=\frac{na_i-1}{n-1} \tag{9.1}$$

$$B_i=(1-a_i)\frac{n}{n-1} \tag{9.2}$$

とおくと，(7.6)は次のように変形される。

$$x_{i,t}=A_i x_{i,t-1}+B_i\overline{x}_{t-1} \tag{9.3}$$

この式に$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$を順次代入すると，次のような方程系を得る。

$$\begin{cases} x_{1,t}=A_1 x_{1,t-1}+B_1\overline{x}_{t-1} \\ x_{2,t}=A_2 x_{2,t-1}+B_2\overline{x}_{t-1} \\ \vdots \\ x_{n,t}=A_n x_{n,t-1}+B_n\overline{x}_{t-1} \end{cases} \tag{9.4}$$

ここで，

$$\overline{x}_{t-1}=\frac{1}{n}(x_{1,t-1}+x_{2,t-1}+\cdots+x_{n,t-1})$$

である。われわれは，この連立方程式を解こうとしているのである。

一般的解法を得るための手がかりを見出すために，簡単な例，すなわち$n=2$の場合を考えてみよう。このとき，(9.4)式は次のようになる。

$$\begin{cases} x_{1,t}=A_1 x_{1,t-1}+B_1\overline{x}_{t-1} \\ x_{2,t}=A_2 x_{2,t-1}+B_2\overline{x}_{t-1} \\ \overline{x}_{t-1}=\frac{1}{2}(x_{1,t-1}+x_{2,t-1}) \end{cases} \tag{9.5}$$

(9.5)式を用いて，$t=1$の場合から順次計算してみよう。まず初めに，

$$\overline{x}_o=\frac{1}{2}(x_{1,o}+x_{2,o})$$

である。次に，

$t=1$のとき，

$$\begin{aligned} x_{1,1}&=A_1 x_{1,o}+B_1\overline{x}_o \\ &=A_1 x_{1,o}+\frac{1}{2}B_1(x_{1,o}+x_{2,o}) \\ x_{2,1}&=A_2 x_{2,o}+B_2\overline{x}_o \\ &=A_2 x_{2,o}+\frac{1}{2}B_2(x_{1,o}+x_{2,o}) \\ \overline{x}_1&=\frac{1}{2}\{A_1 x_{1,o}+A_2 x_{2,o} \\ &\quad+\frac{1}{2}(B_1+B_2)(x_{1,o}+x_{2,o})\} \end{aligned}$$

$t=2$ のとき，

$$x_{1,2}=A_1x_{1,1}+B_1\overline{x}_1$$
$$=A_1^2x_{1,o}+\frac{1}{2}A_1B_1(x_{1,o}+x_{2,o})$$
$$+\frac{1}{2}A_1B_1x_{1,o}+\frac{1}{2}A_2B_1x_{2,o}$$
$$+(\frac{1}{2})^2B_1(B_1+B_2)(x_{1,o}+x_{2,o})$$

$$x_{2,2}=A_2x_{2,1}+B_2\overline{x}_1$$
$$=A_2^2x_{2,o}+\frac{1}{2}A_2B_2(x_{1,o}+x_{2,o})$$
$$+\frac{1}{2}A_2B_2x_{2,o}+\frac{1}{2}A_1B_2x_{1,o}$$
$$+(\frac{1}{2})^2B_2(B_1+B_2)(x_{1,o}+x_{2,o})$$

$$\overline{x}_2=\frac{1}{2}A_1x_{1,o}\{A_1+\frac{1}{2}(B_1+B_2)\}$$
$$+\frac{1}{2}A_2x_{2,o}\{A_2+\frac{1}{2}(B_2+B_1)\}$$
$$+\frac{1}{4}(A_1B_1+A_2B_2)(x_{1,o}+x_{2,o})$$
$$+\frac{1}{8}(B_1+B_2)^2(x_{1,o}+x_{2,o})$$

以下，同様の作業を $t=3$ の場合について行なっても，式が複雑になるだけで，法則性は見出し難い。そこで，方針を変えてみよう。

§ 9.2. 平均値の分解

ここでも簡単な例から始めよう。（9.5）式を変形すると，次のようになる。

$$\begin{cases} x_{1,t}=(A_1+\frac{B_1}{2})x_{1,t-1}+\frac{B_1}{2}x_{2,t-1} \\ x_{2,t}=(A_2+\frac{B_2}{2})x_{2,t-1}+\frac{B_2}{2}x_{1,t-1} \end{cases} \tag{9.6}$$

（9.6）式を用いて，$t=1$ の場合から順次計算していこう。

$t=1$ のとき，

$$\begin{cases} x_{1,1}=(A_1+\frac{B_1}{2})x_{1,o}+\frac{B_1}{2}x_{2,o} \\ x_{2,1}=(A_2+\frac{B_2}{2})x_{2,o}+\frac{B_2}{2}x_{1,o} \end{cases}$$

$t=2$ のとき，

$$x_{1,2}=(A_1+\frac{B_1}{2})x_{1,1}+\frac{B_1}{2}x_{2,1}$$
$$=\{(A_1+\frac{B_1}{2})^2+\frac{B_1}{2}\cdot\frac{B_2}{2}\}x_{1,o}$$
$$+\{(A_1+\frac{B_1}{2})\frac{B_1}{2}+\frac{B_1}{2}(A_2+\frac{B_2}{2})\}x_{2,o}$$

$$x_{2,2}=(A_2+\frac{B_2}{2})x_{2,1}+\frac{B_2}{2}x_{1,1}$$
$$=\{(A_2+\frac{B_2}{2})^2+\frac{B_2}{2}\cdot\frac{B_1}{2}\}x_{2,o}$$
$$+\{(A_2+\frac{B_2}{2})\frac{B_2}{2}+\frac{B_2}{2}(A_1+\frac{B_1}{2})\}x_{1,o}$$

以下同様にして，$t=3$ の場合についても，x_3^1 を途中まで計算したか，式は複雑になるばかりで，またもや，法則性は見出されそうにもない。

§ 9.3. 差分方程式の本からの公式の発見

そこで，差分方程式の本を読んで，公式を発見することにしよう。中央図書館のカード・カタログで difference equations の項を見つけ，題名や出版年などを手がかりに，一般的な本を見つけ出し，著者，書名，コール・ナンバーなどをメモする。[2] そのメモを持って数学科の図書館 Eckhart Library に行き，開架書庫の中で，メモした本，およびその付近の本（つまり似た内容の本）を探して，ページをパラパラと繰り，適当な本を選ぶ。[3] こうして四冊の本を借り出した。[4] 中央図書館の閲覧室に戻ってそれらの本を少し丁寧に見てみるが，われわれがいま問題にしている式に似たものは見つからない。そもそも，連立差分方程式に関する記述がない。[5] 数理経済学の本でも見た方がよいのだろうか。

§ 9.4. 行列を用いた解法

そのとき突然，（9.6）式が次のように表わせることに気づいた。

（2）ここで利用した The University of Chicago の中央図書館 Joseph Regenstein Library のカード・カタログは，著者名カードと件名カードがいっしょに，アルファベット順に並んでいる。今回は，おそらく100冊を越える差分方程式関係書籍の中から，十数冊をメモした。

（3）シカゴ大学の図書館の本は，特殊なものを除き，一般に開架式であり，利用者には大変便利である。

（4）次の四冊である。（Goldberg, 1958），（Levy and Lessman, 1959），（Chorlton, 1965），（Greenspan, 1973）。この四冊のうち，初めの一冊は社会科学者向，残りの三冊は（応用）数学者向けの本である。なお，（Levy and Lessman, 1959）の書名等は，資料紛失のため不明である。

（5）これは見落しであり，（Goldberg, 1958）の最後に簡単な記述があった。

$$\begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 + \frac{B_1}{2} & \frac{B_1}{2} \\ \frac{B_2}{2} & A_2 + \frac{B_2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t-1} \\ x_{2\ t-1} \end{pmatrix}$$

ここで,

$$X_t = \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}, \quad X_{t-1} = \begin{pmatrix} x_{1,t-1} \\ x_{2,t-1} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 + \frac{B_1}{2} & \frac{B_1}{2} \\ \frac{B_2}{2} & A_2 + \frac{B_2}{2} \end{pmatrix}$$

とおけば，(9.7)式は次のようになる。

$$X_t = A\,X_{t-1} \tag{9.8}$$

(9.8)式から，次の式が得られる。

$$X_t = A^t X_o \tag{9.9}$$

さて，いま求めた(9.7)－(9.9)式は，$n=2$の場合についてであった。では，nが任意の値のときには，どうなるだろうか。

(9.3)式中の平均値を分解すると，次の式が得られる。

$$\begin{aligned} x_{i,t} &= A_i\, x_{i,t-1} + \frac{1}{n} B_i (x_{1,t-1} + x_{2,t-1} \\ &\quad + \cdots + x_{i,t-1} + \cdots + x_{n,t-1}) \\ &= \frac{1}{n} B_i\, x_{1,t-1} + \frac{1}{n} B_i\, x_{2,t-1} + \cdots \\ &\quad + (A_i + \frac{1}{n} B_i) x_{i,t-1} + \cdots + \frac{1}{n} B_i\, x_{n,t-1} \end{aligned} \tag{9.10}$$

したがって，(9.4)式は次のようになる。

$$\begin{cases} x_{1,t} = (A_1 + \frac{1}{n} B_1)\, x_{1,t-1} + \frac{1}{n} B_1\, x_{2,t-1} \\ \qquad + \cdots + \frac{1}{n} B_1\, x_{n,t-1} \\ x_{2,t} = \frac{1}{n} B_2\, x_{1,t-1} + (A_2 + \frac{1}{n} B_2)\, x_{2,t-1} \\ \qquad + \cdots + \frac{1}{n} B_2\, x_{n,t-1} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ x_{n,t} = \frac{1}{n} B_n\, x_{1,t-1} + \frac{1}{n} B_n\, x_{2,t-1} \\ \qquad + \cdots + (A_n + \frac{1}{n} B_n)\, x_{n,t-1} \end{cases} \tag{9.11}$$

これは，次のように書きかえられる。

$$X_t = A\,X_{t-1} \tag{9.12}$$

ここで,

$$X_t = \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \\ \vdots \\ x_{n,t} \end{pmatrix} \qquad X_{t-1} = \begin{pmatrix} x_{1,t-1} \\ x_{2,t-1} \\ \vdots \\ x_{n,t-1} \end{pmatrix} \tag{9.13}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 + \frac{B_1}{n} & \frac{B_1}{n} & \cdots & \frac{B_1}{n} \\ \frac{B_2}{n} & A_2 + \frac{B_2}{n} & \cdots & \frac{B_2}{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{B_n}{n} & \frac{B_n}{n} & \cdots\cdot & A_n + \frac{B_n}{n} \end{pmatrix} \tag{9.14}$$

われわれは(9.12)式を，**基本モデルの行列表示**と呼ぶことにする。

さて，(9.12)から

$$X_t = A^t X_o \tag{9.15}$$

ここで

$$X_o = \begin{pmatrix} x_{1,o} \\ x_{2,o} \\ \vdots \\ x_{n,o} \end{pmatrix} \tag{9.16}$$

である。

次に，(9.14)の行列Aを検討しよう。(9.1)，(9.2)から,

$$\frac{B_i}{n} = \frac{1-a_i}{n-1}$$

$$A_i + \frac{B_i}{n} = \frac{n a_i - 1}{n-1} + \frac{1-a_i}{n-1} = a_i$$

ゆえに，Aは次のように書きかえられる。

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & \frac{1-a_1}{n-1} & \cdots\cdot & \frac{1-a_1}{n-1} \\ \frac{1-a_2}{n-1} & a_2 & \cdots & \frac{1-a_2}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1-a_n}{n-1} & \frac{1-a_n}{n-1} & \cdots & a_n \end{pmatrix} \tag{9.17}$$

したがって，（9.15），（9.16），（9.17）を用いることにより，$x_{i,t}$ は初期値とパラメーターによって表現できる。このようにしてわれわれは，**基本モデルの一般解**を得たのである。（1月24日）

§10. 基本モデルの係数行列の特性：マルコフ性の発見

次に，基本モデルの行列表示（9.12）における係数行列 A の性質を調べてみよう。A は（9.14）式または（9.17）式で表現されるが，（9.17）式が本来の式（すなわち，中途の置きかえを廃して，初めのパラメーターで表現した式）である。

初めに行和を検討しよう。（9.17）式の任意の行は，（9.10）式を参照すると，次のようになる。

$$\frac{1-a_i}{n-1} \quad \frac{1-a_i}{n-1} \cdots\cdots a_i \cdots\cdots \frac{1-a_i}{n-1}$$

ここで，n 個の要素のうちで a_i が一個，残りの（$n-1$）個は（$1-a_i$）／（$n-1$）だから，行和は次のようになる。

$$a_i + (n-1)\frac{1-a_i}{n-1} = 1 \tag{10.1}$$

すなわち，A の任意の行和は，1になる。これは実に驚くべきことである。なぜなら，A がこのような性質を有するということは，A が形式的に推率確率行列と同じだということを意味するからである。しかも仮定から A は時間的に変らないから，（9.12）式，すなわち基本モデル（の行列表示）は，（時間不変）マルコフ連鎖と形式的に同型である。したがって，（9.12）式の性質を検討するにあたって，われわれには，既にマルコフ連鎖論で開発された種々の道具だてを利用できる可能性が開けたのである。（1月25日早朝）

しかしながら，発見時の興奮がさめて冷静に考えてみれば，このような演繹型のモデルにおいては当然のことだが，この性質は，われわれが設けた仮定から必然的に導かれる結果のはずである。

そこで，このような係数行列 A を含む式，すなわち（9.12）式を逆上ってみると，（9.11），（9.10），（9.3）式を経て（7.6）式に至り，この式はさらに（7.3）式から導かれている。そして，（7.3）式の係数は A の要素と対応していることが一見して明らかである。しかも（7.3）式は（7.1）式と（7.2）式から導かれたものであるから，行和が1となるという A の性質は，〔仮定5〕と〔仮定6〕から演繹されたものなのである。

このようにして，これまでの模索の中から，(1)われわれが§6までに開発し§7で要約した基本モデル（7.6）が，（9.12），（9.13），（9.17）式によって連立差分方程式として表わされること，しかも，(2)その係数行列の行和が1となることから，この連立差分方程式が形式的にはマルコフ連鎖と同じであること，以上が明らかになった。[6)]

しかしながら，このような定式化の基礎となった（7.2）式には，何ら確率的な意味は含まれていない。したがって，われわれのモデルが形式的にマルコフ連鎖と同一であるとはいっても，それが実質的にどのような意味をもつかは，今後明らかにされなければならない。特に，マルコフ連鎖論を活用して種々の検討をする際には，それに充分留意しなければならないだろう。

さて，この段階でわれわれの行ないうることは，マルコフ連鎖論を用いた議論の展開だけではない。いま手許には，これまでの研究途上で思いついたことをメモしたカードが26枚ある。この中で，モデル自体の一般化に関するものだけでも，次のようなことが考えられている。

1） a_i が時間的に変化する場合。システムは，時間可変（time-varying）マルコフ過程になる。この場合の非同調係数を $a_{i,t}$ と表そう。

（6） このことは，モデルを差分方程式として定立した段階で予測されうることであった。「有限マルコフ連鎖は，連立線形差分方程式に他ならない」（安田・海野，1977：285）のだから，逆は必ずしも真ならずとはいえ，予測しておくべきであった。しかし実際には，残念ながら，（9.12）式に到達後に気づいた。

さらに，$a_{i,t}$ が決定されるメカニズムをモデルに導入できるか。（たとえば，サンクションが大になると，$a_{i,t}$ は小さくなる，など。）[7]

2) 同調の対象は，〔仮定２〕によって，「当該社会の成員中，自己以外のすべての者」となっているが，これは，極めて小さく凝集度の高い集団においてのみ成り立つであろう。（そのような集団において成り立つか否かさえ，未だ実証されていない。）ここで，準拠集団の考えを動員することは，自然なことであろう。準拠集団を表現することは，行列Aを用いて容易におこなえるであろう。また，「独裁制」，その他の関係も，容易に表現できるであろう。

3) 他者の意思決定に関する〔仮定４〕，〔仮定６〕は，種々の変更が可能であろう。たとえば，名義尺度水準における測定――最頻値，というケースは現実に多々存在するであろう。

4) 確率モデルの定立。これは，行列Aの解釈がえにより，比較的容易に行なえよう。

5) 時間を連続時間化し，微分方程式システムを定立することも，当然考えられる。しかし，システムの挙動を経時的に調べるためにコンピューター・シミュレーションを活用することを考えると，微分方程式化は急ぐ必要はない。

6) それよりも重要なのは，「反発係数」の導入である。これまで扱ってきた「非同調係数」は，自分ないし他者の意思決定にどのぐらい近づくかという強度を示すものであった。しかし，ある種の準拠集団は，行為者に対して，「あの人達と同じ意思決定はしたくない」という反応をひきおこすであろう。このような現象を，「反発係数」を用いて表現できるであろう。

以上のような見通しのうえで，われわれは次に，マルコフ連鎖論を用いて，基本モデル（9.12）式を分析しよう。そして次に，（9.12）式の係数行列Aに，上記2)，6)の性質を導入してみよう。（1月27日）

§11. 基本モデルの特性：マルコフ過程および逆マルコフ過程との類似と差異

われわれは前章§10において，基本モデル(9.12)およびその係数行列（9.17）式の検討から，われわれのモデルが「マルコフ連鎖と形式的に同型」であると断定した。本章では，この問題をもう一度検討しよう。

初めに，モデルをもう一度記すことにする。

$$X_t = A\ X_{t-1} \tag{9.12}$$

ここで，

$$X_t = \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \\ \vdots \\ x_{n,t} \end{bmatrix}, \quad X_{t-1} = \begin{bmatrix} x_{1,t-1} \\ x_{2,t-1} \\ \vdots \\ x_{n,t-1} \end{bmatrix} \tag{9.13}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \frac{1-a_1}{n-1} & \cdots & \frac{1-a_1}{n-1} \\ \frac{1-a_2}{n-1} & a_2 & \cdots & \frac{1-a_2}{n-1} \\ \vdots & & & \\ \frac{1-a_n}{n-1} & \frac{1-a_n}{n-1} & & a_n \end{bmatrix} \tag{9.17}$$

また，ここで，Aの行和は１であることが，(10.1)式によって明らかになっている。

ところで，（時間的に不変な有限）マルコフ連鎖の一般式は，次のようになる。

$$\pi_t = \pi_{t-1} P \tag{11.1}$$

ここで，

$$\pi_t = (\pi_{1t}, \pi_{2t}, \cdots, \pi_{nt})$$

$$P = (p_{ij}) \quad (i=1,2,\cdots,n\,;j=1,2,\cdots,n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$$

（7）（Blau, 1960 : 180）を参照。

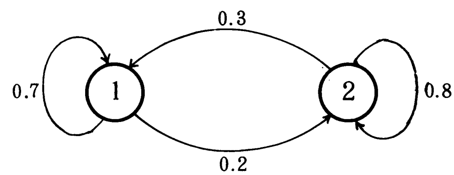
さて，（9.12）式と（11.1）式を比べてみると，次の点が異なっていることが明らかである。すなわち，第一に，（9.12）式のX_tが縦ベクトルであるのに対して，（11.1）式のπ_tは横ベクトルである。第二に，（9.12）式では推移確率行列(と同型の行列)Aの右からベクトルX_{t-1}を掛けているのに対して，（11.1）式では推移確率行列Pの左からベクトルπ_{t-1}を掛けている。そこで，比較のために，（9.12）式の両辺を転置すると，次のようになる。

$$X_t' = X_{t-1}' A' \tag{11.2}$$

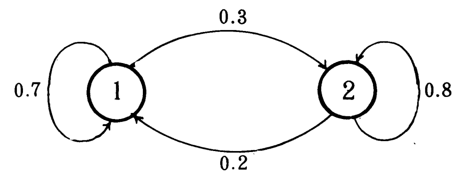
ここで，右肩の$'$は転置を示す。この結果，(11.2）式におけるX_t'，X_{t-1}'は横ベクトルになって(11.1）のπ_t，π_{t-1}と同じ型になり，また，行列とベクトルの掛ける順序も同じになった。そこで，（11.1）式と（11.2）式の類似点と差異点は，PとA'に集約されたことになる。

ここでわれわれは，非常に興味深い事実に気がつく。すなわち，Aの転置行列A'においては，もはや，推移確率行列が備えているべき条件である行和＝1が保たれていないのである。A'においては，列和＝1なのである。したがって，われわれの基本モデル（11.2）式は，マルコフ連鎖（11.1）式と似てはいるが，性質が異なるものである。では，われわれの基本モデルのような関係は，従来，定式化されていないのだろうか。

手近にあるマルコフ過程の本を開いてみると，逆マルコフ過程（Inverse Markov Process）という言葉がある（Howard, 1971：529－539)。しかしこれは，一般の（time-variant ないし time-invariantな）マルコフ過程の存在を前提にして，現在の状態を所与とした時に，過去のある時点においてプロセスが各状態にいた確率を推定しようとするものである。この考え方は，現在の状態がどこから来たか,[8]　ということをたずねる点では，われわれのモデルと似ている。しかし，われわれのモデルが，この「来るメカニズム」自体を推移確率行列（と同じ形をした線形変換のための行列）で定式化しているのに対して，逆マルコフ過程においては，実在するのはマルコフ過程なのであって，逆マルコフ過程というのは時間的に遡及する推定の方法なのである。それゆえに，そこにはベイズの定理が現われる（Howard, 1971：526)。しかも，時間的に不変な推移確率行列Pをもつマルコフ過程に対応する逆マルコフ過程は，少し考えた時には，時間的に不変な推移確率行列を持つように思えるが，実際には



(a)　同調モデル



(b)　マルコフ連鎖

図1　同調モデルとマルコフ連鎖
（ n＝2の場合の数値例）

時間の関数なのである（Howard, 1971：529)。

このようにして，われわれのモデルに直接当てはまるような定式化は，少くとも中程度のレベル[9]においては，一般的でないことが確認された。

われわれのモデル（11.2）式とマルコフ連鎖(11.1）式の類似点と相違点は，図1に示した最も単純な（ n＝2の）場合で考えてみると明らかになる。すなわち，マルコフ連鎖では，ある状態から出る矢印に添えた数字（推移確率）の和が1であるのに対して，同調モデルでは，ある行為者に入る矢印に添え

（8）　われわれのモデルは線形結合のモデルであり，確率過程モデルではないから，この言い方は厳密には正確ではない。われわれのモデルでは，ある行為者の意思決定がどの行為者の影響によって成立しているのかを考えているのである。
（9）　（Howard, 1971）は，M.I.T.およびStanford University の大学院における講義を基礎としている。

た数字（非同調係数a_iと$1-a_i$）の和が1になるのである。

しかし，（11.2）式と（11.1）式が，そのような相違の存在にもかかわらず，類似点をも持つであろうことは予測できる。実際，（11.2）式のもとになった（9.12）式において，係数行列Aは形式的には推移確率行列と同じ（行和が1）である。したがって，Aに関しては，マルコフ過程論の活用が可能となる。たとえば，Aが（正則）ならば，Aには極限行列が存在し，X_tは不変分布をもつだろう。[10] Aをz変換（Howard, 1960；Howard, 1971）して，時間的性質を分析することも可能だろう。たとえば，図1において，(b)マルコフ連鎖の場合，推移確率行列Pは，

$$P=\begin{pmatrix}0.7 & 0.3\\ 0.2 & 0.8\end{pmatrix} \tag{11.3}$$

したがって

$$I-P_z=\begin{pmatrix}1-0.7z & -0.3z\\ -0.2z & 1-0.8z\end{pmatrix} \tag{11.4}$$

$I-P_z$の行列式は，

$$\begin{aligned}&|I-P_z|\\ &=(1-0.7z)(1-0.8z)-(-0.2z)(-0.3z)\\ &=1-1.5z+0.5z^2\\ &=(1-z)(1-\tfrac{1}{2}z)\end{aligned} \tag{11.5}$$

そこで，$(I-P_z)$の逆行列は，次のようになる。

$$\begin{aligned}&(I-P_z)^{-1}\\ &=\frac{1}{(1-z)(1-\frac{1}{2}z)}\begin{pmatrix}1-0.8z & 0.3z\\ 0.2z & 1-0.7z\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{1-z}\begin{pmatrix}0.4 & 0.6\\ 0.4 & 0.6\end{pmatrix}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}z}\begin{pmatrix}0.6 & -0.6\\ -0.4 & 0.4\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{11.6}$$

ゆえに，z変換の関係から，

$$P^t=\begin{pmatrix}0.4 & 0.6\\ 0.4 & 0.6\end{pmatrix}+\left(\frac{1}{2}\right)^t\begin{pmatrix}0.6 & -0.6\\ -0.4 & 0.4\end{pmatrix} \tag{11.7}$$

となる。すなわち，Pのt乗，つまりt次の推移確率行列は，（11.7）式で与えられる。ここから，

$$P^\infty=\lim_{t\to\infty}P^t=\begin{pmatrix}0.4 & 0.6\\ 0.4 & 0.6\end{pmatrix} \tag{11.8}$$

であることが容易に分かる。また，不変分布が(0.4, 0.6）であることも分かる。

他方，図11．1において，(a)同調モデルの場合，係数行列Aは次のようになる。

$$A=\begin{pmatrix}0.7 & 0.3\\ 0.2 & 0.8\end{pmatrix} \tag{11.9}$$

これは，（11.3）式のPと全く同じであるから，（11.7）式と同様に，

$$A^t=\begin{pmatrix}0.4 & 0.6\\ 0.4 & 0.6\end{pmatrix}+\left(\frac{1}{2}\right)^t\begin{pmatrix}0.6 & -0.6\\ -0.4 & 0.4\end{pmatrix} \tag{11.10}$$

となり，さらに（11.8）式と同様に，

$$A^\infty=\lim_{t\to\infty}A^t=\begin{pmatrix}0.4 & 0.6\\ 0.4 & 0.6\end{pmatrix} \tag{11.11}$$

となる。

ところで，マルコフ連鎖において，（11.8）式は$t\to\infty$のときにP^tの各行は等しくなり，これは，状態間の確率分布が初期分布のいかんにかかわらず一定の分布に近づく，ということを示している。この例の場合では，状態1に存在する確率が0.4，状態2に存在する確率が0.6なのである。

それでは，同調モデルの場合，（11.11）式で示される極限行列は何を示しているのであろうか。これは，意思決定が（11.9）式のAを用い（9.12）式のメカニズムによってなされる場合，究極的には，行為者1に対しても行為者2に対しても，行為者1の意思決定の初期値が0.4，行為者2の意思決定の初期値が0.6の割合を占めるということを示している。これは，（9.15），（11.11）両式から，

$$X_\infty=A^\infty X_0 \tag{11.12}$$

を導き出してみれば明らかである。したがって，係数行列Aの極限行列の各行は，各行為者がその社会

(10)　X_tの不変分布に対するこの考えが誤りであることは，本章末に示される。

において有している究極的影響力を示している。図1のような二人社会の場合には，このことは行列Aないし図1に示したダイヤグラムから直観的に求められるが，三人社会以上の場合には，実際に極限行列を算出することが必要になるだろう。また，マルコフ連鎖の場合，極限行列の各行は不変分布に等しいが，われわれの同調モデルの場合，そのような関係は存在しない。いま，

$$X_\infty = A\,X_\infty \tag{11.13}$$

を満足するような列ベクトル

$$X_\infty = \begin{pmatrix} x_\infty^1 \\ x_\infty^2 \\ \vdots \\ x_\infty^n \end{pmatrix} \tag{11.14}$$

を仮に不変分布と呼ぶなら，(11.13) 式は，

$$x_\infty^i = x_\infty^j \quad \text{すべての } i,j \in S \text{ に対して} \tag{11.15}$$

を満足するいかなる x_∞ に対しても成り立つ。[11] そもそも，$x_{i,t}$ は確率分布ではないのだから，$\sum_{i=1}^{n} x_{i,t}$ が1になるわけでもない。$x_{i,t}$ は t 時点における行為者 i の意思決定なのである。したがって，(11.13)〜(11.15) 式は，社会のすべての成員が同じ意思決定に達したならば，それが均衡値であることを示している。[12] そして，その均衡値の形成に寄与した影響力が，極限行列で示されるのである。（1月30日朝）

§12. 基本モデルの時間変化：z 変換による分析

前章の議論から，われわれの同調モデル（9.12）式において，意思決定の均衡値 $x_{i,\infty}$（すなわちコンセンサス）は，係数行列Aの極限行列A^∞を

$$A^\infty = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \tag{12.1}$$

とした時，

$$x_{i,\infty} = \sum_{i=1}^{n} a_i\, x_{i,o} \tag{12.2}$$

であることが明らかになった。

そこで，われわれの課題は，AからA^∞をいかにして求めるか，および，A^∞はどのような場合に収束するか（安定条件），を明らかにすることに還元される。

§12.1. 二人社会（ダイアド）の場合

二人社会（$n=2$）の場合について考えよう。それにはz変換を用いて，A^tを定常成分と変動成分に分解すればよい。

$n=2$の場合，基本モデル（9.12）式の係数行列Aは，一般に次のようになる。

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 1-a_1 \\ 1-a_2 & a_2 \end{pmatrix} \tag{12.3}$$

このAを用いて，次のような変換を行なう。まず，$I-Az$を求める。

$$I-Az = \begin{pmatrix} 1-a_1 z & -(1-a_1)z \\ -(1-a_2)z & 1-a_2 z \end{pmatrix} \tag{12.4}$$

次に，この行列の逆行列を求めるための準備として，行列式の値を求める。

$$\begin{aligned} |I-Az| &= (1-a_1 z)(1-a_2 z) \\ &\quad -(1-a_1)z(1-a_2)z \\ &= 1-(a_1+a_2)z-(1-a_1-a_2)z^2 \\ &= (1-z)\{1-(a_1+a_2-1)z\} \end{aligned} \tag{12.5}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned} &(I-Az)^{-1} \\ &= \frac{1}{(1-z)\{1-(a_1+a_2-1)z\}} \begin{pmatrix} 1-a_2 z & (1-a_1)z \\ (1-a_2)z & 1-a_1 z \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1-z} \begin{pmatrix} \dfrac{a_2-1}{a_1+a_2-2} & \dfrac{a_1-1}{a_1+a_2-2} \\[2ex] \dfrac{a_2-1}{a_1+a_2-2} & \dfrac{a_1-1}{a_1+a_2-2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(11)　(11.15)は(11.13)を満足するが，逆は未だ証明されていない。後に，明らかにしたい。

(12)　この場合は，安定均衡である。この点については，後に改めて議論する。

$$+\frac{1}{1-(a_1+a_2-1)z}\begin{bmatrix}\dfrac{a_1-1}{a_1+a_2-2} & \dfrac{1-a_1}{a_1+a_2-2}\\[2ex] \dfrac{1-a_2}{a_1+a_2-2} & \dfrac{a_2-1}{a_1+a_2-2}\end{bmatrix}$$

（12.6）

ここで，z 変換の関係を利用して，[13]

$$A^t=\begin{bmatrix}\dfrac{1-a_2}{(1-a_1)+(1-a_2)} & \dfrac{1-a_1}{(1-a_1)+(1-a_2)}\\[2ex] \dfrac{1-a_2}{(1-a_1)+(1-a_2)} & \dfrac{1-a_1}{(1-a_1)+(1-a_2)}\end{bmatrix}$$

$$+(a_1+a_2-1)^t\begin{bmatrix}\dfrac{1-a_1}{(1-a_1)+(1-a_2)} & \dfrac{-(1-a_1)}{(1-a_1)+(1-a_2)}\\[2ex] \dfrac{-(1-a_2)}{(1-a_1)+(1-a_2)} & \dfrac{1-a_2}{(1-a_1)+(1-a_2)}\end{bmatrix}$$

（12.8）

したがって，極限行列 A^∞ は，

$$A^\infty=\lim_{t\to\infty}A^t$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{1-a_2}{(1-a_1)+(1-a_2)} & \dfrac{1-a_1}{(1-a_1)+(1-a_2)}\\[2ex] \dfrac{1-a_2}{(1-a_1)+(1-a_2)} & \dfrac{1-a_1}{(1-a_1)+(1-a_2)}\end{bmatrix}$$

（12.8）

となる。また，収束特性は次のようになる（表1）。この関係は，図2に示されている。

表1　二人社会の収束特性

SFの変域	a_1+a_2の変域	X_tの挙動
$a_1+a_2-1<-1$	$a_1+a_2<0$	振動発散
$a_1+a_2-1=-1$	$a_1+a_2=0$	無限振動
$-1<a_1+a_2-1<0$	$0<a_1+a_2<1$	振動収束
$a_1+a_2-1=0$	$a_1+a_2=1$	瞬間収束
$0<a_1+a_2-1<1$	$1<a_1+a_2<2$	単調収束
$a_1+a_2-1=1$	$a_1+a_2=2$	一定値
$1<a_1+a_2-1$	$2<a_1+a_2$	単調発散

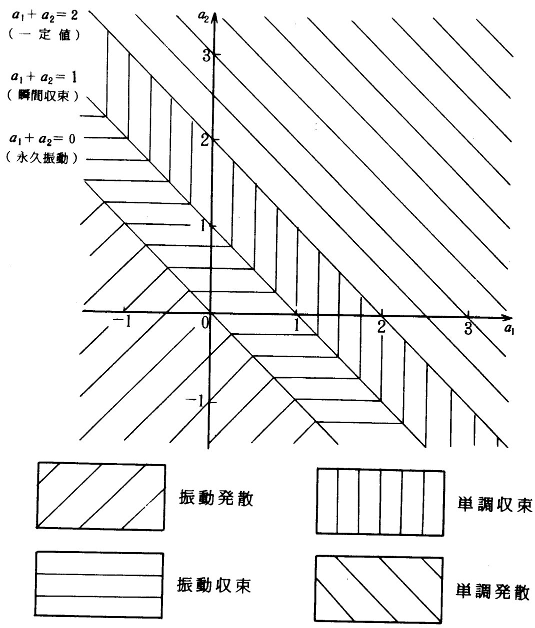


図2　時間不変不均質正確認知二人社会における社会的決定過程モデルの安定条件

この図からは，いろいろなことが読みとれる。しかし，個々の状況について述べる前に，われわれは1つの重要なことに注目しよう。それは，a_iの変域についての仮定である。われわれは，定義2（§7）において，

$$0\leqq a_i\leqq 1$$

と仮定した。しかし，この変域制限は，再検討する必要があるように思われる。この問題については，章を改めて議論しよう。

§13. 先行研究との比較検討（1）

さて，以上に述べた研究の基本的発想の一端を，ある研究者に話したところ，[14] よく似た研究が存在するという。French（1956）と Harary（1959）の論文で，彼が簡単に説明してくれたところによると，実際，かなり似ているようである。明日，早速しらべる必要がある。（1月30日夜）

§13.1. Frenchのモデル

このモデルは，（Cartwright and Zander,

(13)　たとえば，（Howard, 1960）の Table 1.3（p.9），または（Howard, 1971）の Table 1.5.1（p.45）を参照。
(14)　山口一夫氏（総理府統計局，シカゴ大学大学院）。数理社会学および社会成層論を専攻。

1968）に収録されてもいることが分かった。かなり有名なモデルのようである。

彼は，レヴィンの場の理論を発想の根拠にモデルを構築する。そして，論文の題名からも想像できるように，いくつかの（実際には3個の）仮定から（7個の）定理を導びいている。このFrenchモデル（Fモデル）とわれわれのモデル（Uモデル）の類似点と相違点は，次の通りである。

類似点

1）形式：演繹理論の構築を目ざしている。

2）発想：行為者の意見は，他者の意見と自己の意見の両方に影響されつつ変容する。

2）発想：その相互作用の結果として，社会的決定（Fモデルではunanimity）が得られる。

相違点

1）Fモデルでは，行為者の意見が，他者の影響力と自己の抵抗力が等しくなる均衡点まで移動する，と考えられている。これに対してUモデルでは，無意識のプロセスをも許容するものの基本的には，行為者が自分で自分の位置を選択すると考えられている。また，各時点での均衡は想定していない。

2）Fモデルでは，個々の他者の影響力は，存在するか否かの二値的である。すなわち，ある行為者に影響を及ぼす他者間に影響力の差はない。これに対して，Uモデルでは（これまで扱ってきた範囲では，全ての他者が等しい影響力を及ぼす，というFモデルよりも単純な場合しか述べられていないが，既に注の中で示唆し後に明らかになるように）他者は任意の値の影響力をもちうる。

3）上記の仮定とも若干の関係があるが，Fモデルでは，ある行為者がm人の人から影響を受けた時，次の時点の自分の意見に対して現時点の自分の意見のもつ影響力は$1/(m+1)$であることが，暗黙のうちに仮定されている。これに対して，Uモデルでは，自己の影響力は非同調係数a_iによって任意に定めることができる。

4）Fモデルは，グループ・ダイナミックス学派の研究らしく，「どのような相互作用構造の時に意見の一致が生じうるか」という関心から出発している。これに対してUモデルでは，「行為者の意思決定メカニズムと社会的決定」との関係から出発している。しかし，モデルを洗練させていけば，両者とも他方を無視できなくなるであろう。前者では，その素朴な行為者像を克服する必要が生じようし，後者では，すでに何度か示唆してきたように，均質社会からの脱皮が不可欠だからである。

§13.2. HararyによるFrenchモデルの一般化

Harary（1959）は，Frenchの研究の上に立って，いくつかの貢献をなしとげた。

第一に，社会構造と合意形成との関係についてである。Frenchが行なったのは，5つの社会構造[15)]に関して，四人集団の場合の例示に基づいて定理を述べたことであった。これに対してHararyは，グラフ理論を適用して，合意の形成される条件を明らかにした（定理8，9，11，12，13）

第二に，彼は，影響関係を示す方程式系の係数行列がマルコフ連鎖の推移確率行列であることを発見し，この行列の極限行列が成員の相対的な影響力を表わすことを見出した。（定理10，14，15）

第三に，彼は上述したFモデルについての（Uモデルとの）相違点2)，3)に関する一般化を試みた（公理3′，3″）。まず，二人の行為者A（意見a），B（意見b）を考え，BがAに影響を及ぼすとき，一時点後の意見は

$$\gamma a+(1-\gamma)b$$

で表わされるとした。さらに，A（意見a），B（意見b），C（意見c）から成る三人集団で，AがBとCから影響を受ける時には，

$$\frac{2}{3}\gamma a+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\gamma\right)b+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\gamma\right)c$$

(15) 非連結（disconnected），弱連結（weakly connected），一方向連結（unilaterally connected），強連結（strongly connected），完全（complete）の5つ。

とした（公理3′）。Frenchの定式化は，これらの式で$\gamma=\frac{1}{2}$とした場合に相当する。Hararyはさらに，このγの値が人によって異なる場合にも言及した（公理3″）。

さて，以上に述べたHararyの貢献を検討しよう。

第一の点に関しては，われわれはこれまでほとんど検討を行なっていない。したがって，われわれのモデルと種々の社会構造との関係を考察する際に，彼の論文は貴重な参考材料となるだろう。

第二点に関しては，Hararyとわれわれは，独立に同じ発見をしたことになる。しかし，Hararyの扱いには若干問題がある。(1)まず，彼は，マルコフモデルと影響過程モデル（この点では，FモデルもUモデルも同一）の差異に気づいていない。影響過程モデルは，確率モデルではなく決定論的モデルであり，しかも形式的にさえ，マルコフ連鎖と同じではないのである（§10，§11を参照）。(2)さらに，マルコフ過程に関する彼の理解が初歩的なために，極限分布（不変分布）にしか言及していない。マルコフ連鎖との類似性から，われわれは，はるかに多くの含意を導出できるであろう。§11で述べたz変換による収束条件，均衡値，変動成分などについての分析は，その一端である。

第三点に関して，Hararyの導入したγは，われわれの非同調係数aと同じように一見思われる。しかし，彼が「変化への抵抗（opposition to change）」と名づけたγとわれわれのaは，内容が異なる。aを含んだある式によって行為者自身の意見が決定されることを，われわれは後に見るだろう。$\gamma=a$となるのは，ある特殊な場合である。

以上に述べたFrenchとHararyの研究は，要約すれば，われわれのモデルの特殊ケースに相当する。そのことは，われわれのモデルを一応完成させた時に明らかになるだろう。われわれは，先行研究の検討をひとまず打ち切って，いま構想しつつあるモデルの展開に力を注ぐことにしよう。（2月1日）

§14. 社会的投射の導入

ここで，社会的投射のメカニズムをモデルに導入しよう。社会的投射とは，他者認知が自己信念によって歪む現象をいうが，[16] われわれのモデルに則していえば，他者の意思決定が，自己の意思決定に近づけて認知される，という現象である。もちろん，自己の意思決定も正しく認知されるとは限らないが，われわれはとりあえず，自己認知は正しいものと仮定する。すると，社会的投射のメカニズムは，たとえば次のように表現される。

モデル1

$$Coq(x_{o_i,t})=x_{o_i,t}-b_i(x_{o_i,t}-x_{i,t}) \tag{14.1}$$

ここで，$Coq(x_{o_i,t})$は$x_{o_i,t}$についての認知，b_iは，次のような性質をもつ係数である。

$b_i=0$　ゆがみなし　$Coq(x_{o_i,t})=x_{o_i,t}$

$b_i=1$　自分と重ねる　$Coq(x_{o_i,t})=x_{i,t}$

$0<b_i<1$　一般の場合（自分に近づける）

（14.1）式は，変形すると次のようになる。

$$Coq(x_{o_i,t})=b_i x_{i,t}+(1-b_i)x_{o_i,t} \tag{14.2}$$

モデル2

認知された距離は実際の距離の何倍か，という考え方をすると，次の式が得られる。

$$b_i(x_{o_i,t}-x_{i,t})=Coq(x_{o_i,t})-x_{i,t} \tag{14.3}$$

変形すると，

$$Coq(x_{o_i,t})=(1-b_i)x_{i,t}+b_i x_{o_i,t} \tag{14.4}$$

ここで（14.2）式と（14.4）式を比べてみると，bのとり方が逆なだけで，基本的に同じ式であることが分かる。そこで，（14.2）と（14.4）の優劣を決めるために，（14.4）式の係数bの意味を考えてみよう。

$b=0$　距離がないと認知

(16)　社会的投射および調査研究における分析例については，（海野・鏡，1977）を参照。

$b=1$　距離を正しく認知

$0<b<1$　距離を縮めて認知

このように考えてみると，

$b>1$　距離を拡大して(実際より遠く)認知

$b<0$　実際とは反対方向に認知

という拡張ができる。モデル1よりもこのモデルの方が係数の解釈が素直なので，われわれは，このモデルを採用することにしよう。

さて，(14.4)式で導入された社会的投射のメカニズムを，われわれのモデルに組み入れよう。それには，(7.2)式の $x_{o_i,t-1}$ に，$Cog(x_{o_i,t-1})$ を代入する。

$$x_{i,t}=a_i x_{i,t-1}+(1-a_i)\{(1-b_i)x_{i,t-1}+b_i x_{o_i,t-1}\}$$
$$=\{a_i+(1-a_i)(1-b_i)\}x_{i,t-1}+(1-a_i)b_i x_{o_i,t-1} \qquad (14.5)$$

この式の係数の和が1になっていることを確認しておこう。

$$\{a_i+(1-a_i)(1-b_i)\}+(1-a_i)b_i$$
$$=a_i+(1-a_i)\{(1-b_i)+b_i\}$$
$$=a_i+(1-a_i)=1 \qquad (14.6)$$

以上の考察から，(7.2)式を次のように拡張する。

基本モデル

$$x_{i,t}=a_{i,t-1}x^c_{i,t-1}+(1-a_{i,t-1})x^c_{o_i,t-1} \qquad (14.7)$$

ただし，$x^c_{i,t-1}$，$x^c_{o_i,t-1}$ はそれぞれ，$x_{i,t-1}$，$x_{o_i,t-1}$ に対する認知である。また，次のような仮定を導入する。

仮定14.1　自己認知は正確である。

$$x^c_{i,t-1}=x_{i,t-1} \qquad (14.8)$$

仮定14.2　他者認知

$$x^c_{o_i,t-1}=(1-b_{i,t-1})x_{i,t-1}+b_{i,t-1}x_{o_i,t-1} \qquad (14.9)$$

仮定14.3　非同調係数の時間不変・均質性

$$a_{i,t}=a \quad \text{すべての } i\in S,\ t\in T \text{ に対して} \qquad (14.10)$$

仮定14.4　相互距離認知係数の時間不変・均質性

$$b_{i,t}=b \quad \text{すべての } i\in S,\ t\in T \text{ に対して} \qquad (14.11)$$

基本モデルと仮定から，次の式が得られる。

$$x_{i,t}=\{a+(1-a)(1-b)\}x_{i,t-1}+(1-a)b\,x_{o_i,t-1} \qquad (14.12)$$

この式と(7.2)式を比べると，

(7.2)式	(14.12)式
a	$a+(1-a)(1-b)$
$1-a$	$(1-a)b$

という対応関係のあることが分かる。したがって，(14.12)式の収束特性は，

$$S=\frac{n\{a+(1-a)(1-b)\}-1}{n-1} \qquad (14.13)$$

の値によって定まる。

(i)　$S>1$ のとき，単調発散

$$\frac{n\{a+(1-a)(1-b)\}-1}{n-1}>1$$

$n\geqq 2$ ゆえ，

$$n\{a+(1-a)(1-b)\}-1>n-1$$

整理すると，

$$-b(1-a)>0$$

ところが，定義より $0\leqq a\leqq 1$ ゆえ，

$$a\fallingdotseq 1 \quad \text{かつ} \quad b<1$$

(ii)　$S=1$ のとき，一定値

$$a=1 \quad \text{または} \quad b=0$$

(iii)　$0<S<1$ のとき，単調収束

$$0<b(1-a)<\frac{n-1}{n}$$

(iv)　$S=0$ のとき，瞬間収束

$$b(1-a)=\frac{n-1}{n}$$

(v)　$-1<S<0$ のとき，振動収束

$$\frac{n-1}{n}<b(1-a)<\frac{2(n-1)}{n}$$

(vi)　$S=-1$ のとき，無限に振動

$$b(1-a)=\frac{2(n-1)}{n}$$

(vii)　$S<-1$ のとき，振動発散

$$b(1-a)>\frac{2(n-1)}{n}$$

ところで，上記の収束条件が成り立つためには，(14.12) 式において，

$$\bar{x}_t=\bar{x}_{t-1} \tag{14.14}$$

が成り立っていることが必要である。そこで，(14.14) を証明するために，まず，(14.12) に

$$\begin{aligned} x_{oi,t-1} &= \frac{1}{n-1}\sum_{\substack{j\in s\\ j\neq i}} x_{j,t-1} \\ &= \frac{1}{n-1}(n\bar{x}_{t-1}-x_{i,t-1}) \end{aligned} \tag{14.15}$$

を代入すると，次の式が得られる。

$$\begin{aligned} x_{i,t} &= \frac{n(ab-b+1)-1}{n-1}x_{i,t-1} \\ &\quad + b(1-a)\frac{n}{n-1}\bar{x}_{t-1} \end{aligned} \tag{14.16}$$

$i\in S$ について辺々加えると，

$$左辺=\sum_{i\in s}x_{i,t}=n\bar{x}_t$$

$$\begin{aligned} 右辺 &= \frac{n(ab-b+1)-1}{n-1}\sum_{i\in s}x_{i,t-1} \\ &\quad + b(1-a)\frac{n}{n-1}\sum_{i\in s}\bar{x}_{t-1} \\ &= \left[\frac{n(ab-b+1)-1}{n-1}\right]n\bar{x}_{t-1} \\ &\quad + b(1-a)\frac{n}{n-1}\cdot n\bar{x}_{t-1} \\ &= n\bar{x}_{t-1} \end{aligned}$$

$$\therefore n\bar{x}_t=n\bar{x}_{t-1}$$

$$\bar{x}_t=\bar{x}_{t-1}\qquad（証明終り）$$

（1980年2月初頭 — 日付不明シカゴにて）

§ 結 語

以上の議論によって，われわれが既に定式化し公表した社会的決定過程モデル（海野，1980，1981*a*，*b*，*c*）の構築過程が，かなり明らかになった。むろん，一読して分かるように，準拠度，顕在度，自己変化認知係数，自己偏倚認知係数は，未だ導入されていない。その過程については，別の機会に記したい。

（1981年9月22日，西宮・上ケ原にて）

謝辞

本稿は，「社会科学国際フェロー」（国際文化会館）としてシカゴ大学滞在中に記されたものである。御推薦いただいた山田圭一（筑波大），萬成博（関西学院大），倉田和四生（同）各教授，種々の御援助をいただいた加藤幹雄（国際文化会館），田南立也（同）両氏，そして，本研究を生む知的雰囲気を生み出してくれた James S. Coleman (Univ. of Chicago)，François Nielsen（同），山口一夫（同）らに感謝したい。

＊＊ 引　用　文　献 ＊＊

Blau, Peter M.
1960　"Structural effects," *American Sociological Review*. 25 : 178 − 193.

Cartwright, D. and A. Zander. (eds.)
1968　*Group Dynamics*. third ed., New York : Harper. 三隅二不二・佐々木薫訳編『グループ・ダイナミックス』I，II，誠信書房，1970（原著 second. ed. の訳）

Chorlton, F.
1965　*Ordinary Differential & Difference Equations*. New York : Van Nos Reinhold.

French, John R. P., Jr.
1956　"A formal theory of social power," *The Psychological Review*. 63 : 181 − 194, Also pp. 557 − 568 in D. Cartwright and A. Zander (eds), *Group Dynamics*. third ed., New York : Harper.

Greenspan, Donald.
1973　*Discrete Models*. Reading, Mass: Addison-Wesley.

Goldberg, Samuel.
1958 *Introduction to Difference Equations.* New York: Wiley.

Harary, Frank.
1959 "A criterion for unanimity in French's theory of social power," pp. 168−182 in D. Cartwright (ed.), *Studies in Social Power.* Ann Arbor, Mich.: University of Michigan Press.

Howard, Ronald A.
1960 *Dynamic Programming and Markov Process.* Cambridge, Mass.: The M.I.T. Press. 関根・羽島・森訳『ダイナミック・プログラミングとマルコフ過程』培風館, 1962。

Howard, Ronald A.
1971 *Dynamic Probabilistic Systems. Vol I: Markov Models.* New York: Wiley.

海　野　道　郎
1980 「個人的決定と社会的決定(1)：意思決定過程モデルの構築」，『関西学院大学社会学部紀要』41：13−25

1981a 「個人的決定と社会的決定(2)：意思決定過程モデルによる時間不変均質社会の分析」，『関西学院大学社会学部紀要』42：13−26

1981b 「個人的決定と社会的決定：(一)：意思決定過程モデルの構築と時間不変均質社会の分析」,『現代社会学』8(1)：145−167.

1981c 「個人的決定と社会的決定：(二) 時間不変不均質社会の分析(1)」,『現代社会学』8(2)：154−177.

1981d 「ある数理モデルの誕生：「意思決定過程モデル」の構築に関する「プロセス提示型論文」(1)」,『関西学院大学社会学部紀要』43：

海野道郎・鏡　豊
1977d 「偏見の因果構造」，『関西学院大学社会学部紀要』34：51−65.

安田三郎・海野道郎
1977 『社会統計学』(改訂２版)，東京：丸善。

〔補論〕　訂正

本文の表１および図２において，$a_1+a_2=2$の場合に$x_{i,t}$は「一定値」をとると記されている。しかし，これは必ずしも正しくない。

ところで，われわれは既に（海野，1981 *c*）において二人社会の分析を集中的に行ったのだが，そこでも同じ誤りをした。そこでここでは，（海野，1981 *c*）に沿って訂正をしておきたい。

〔系4・4・3〕時間不変不均質正確認知二人社会における社会的決定過程モデルの安定条件について。

系に先立つ記述中に，次のような箇所がある（167頁）。

$SF=1$の場合，$(SF)^t=1$ゆえ，常に

$$\begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,o} \\ x_{2,o} \end{pmatrix}$$

である（一定値）。

また，（海野，1981 c）の表４．１でも，$SF=1$の場合のX_tの挙動が一定値となっている。しかし，これは，次のように訂正されるべきである。

$SF=1$のとき$a_1+a_2=2$ゆえ，（4．3．10）式の分母がゼロとなるから，このような変形はできない。そこで（4．3．3）式に戻り，$a_1=a$，$a_2=2-a_1=2-a$とおくと，

$$x_{1,t} = a x_{1,t-1} + (1-a) x_{2,t-1} \qquad (1)$$
$$x_{2,t} = (a-1) x_{1,t-1} + (2-a) x_{2,t-1} \qquad (2)$$

(1)から(2)を辺々引くと，

$$x_{1,t} - x_{2,t} = x_{1,t-1} - x_{2,t-1} \qquad (3)$$

すなわち，$x_{1,t}$と$x_{2,t}$は，「一定値」ではなく，「一定差」なのである。

しかし，$x_{1,t}$と$x_{2,t}$は，一定差を保ったまま，どのように変化するのだろうか。いま，(1)，(2)を次のように変形する。

$$x_{1,t} - x_{1,t-1} = (1-a)(x_{2,t-1} - x_{1,t-1}) \qquad (1')$$
$$x_{2,t} - x_{2,t-1} = (1-a)(x_{2,t-1} - x_{1,t-1}) \qquad (2')$$

ここで，(3)より

$$x_{2,t-1} - x_{1,t-1} = x_{2,o} - x_{1,o} \qquad (3')$$

ゆえに，(1′)と(3′)，(2′)と(3′)より，それぞれ，

$$x_{1,t} - x_{1,t-1} = (1-a)(x_{2,o} - x_{1,o})$$
$$x_{2,t} - x_{2,t-1} = (1-a)(x_{2,o} - x_{1,o})$$

すなわち，$x_{1,t}$と$x_{2,t}$は，一定差$x_{2,o}-x_{1,o}$を保ったまま，$(1-a)(x_{2,o}-x_{1,o})$ずつシフトするので

ある。また，$a_1 = 1$，$a_2 = 1$という特殊ケースにのみ，$x_{1,t}$と$x_{2,t}$は一定値をとる。

（1981年10月17日）

（付記）この訂正は，「第4回数理社会学研究会」（10月12日，於東京）における討論に負うところが多い。メンバーに謝意を表したい。