

# 分 結 指 数 の 検 討

—方法論的考察・その2—

海 野 道 郎

## §0. 研究の目的

われわれは前稿(海野, 1977)において、「分結指数のもつ問題点を明らかにし、分結指数の欠点の克服に向けての着実な一歩」を踏み出すため、(1)分結指数のとりうる最小値、(2)センサストラクトの合併効果、(3)マイノリティー・グループが複数の場合の処理などについて考察を行なった。本稿の目的は、上記(1)と相補的關係にある課題、すなわち、分結指数のとりうる最大値について、その性質を明らかにすることにある<sup>1)</sup>。

本稿では、前稿に引き続き、代表的分結指数である非類似係数 $D$ について検討する<sup>2)</sup>。

Cortese ら (1976) が非類似係数 $D$ の最小値について議論をし、Taeuber and Taeuber (1976) がそれに対して反論を展開したことに關しては、前稿に述べた通りである (§1.1)。その反論の中で、彼らは、次のようなことをも記している。

(最小値の場合と——引用者)同様の議論が、非類似係数のとりうる最大値についても行うことができよう。しかし、とりうる最大値を決定する条件は異なっている。完全に分結した分布が生じるためには、いくつかの地区をマイノリティーが完全に占めなければならぬ。地区の大きさが大きければ大きいほど、マイノリティーの家の数といくつかの

地区の家の数の合計とが完全に一致する可能性は少なくなるだろう。(Taeuber and Taeuber, 1976: 884. 下線——引用者)

この議論は、直観的には異論のないように見える。しかし、はたして正確な議論なのであろうか。

## §1. 非類似係数 $D$ のとりうる最大値 ( $D_{max}$ ) ——その定式化

前稿と同様、次のように記号を定める。

$k$  : ある地域内の地区の数

$q$  : その地域におけるマイノリティーの比率 ( $0 < q < 1$ )

$N$  : 1つの地区内の人口<sup>3)</sup>

### §1.1. マイノリティーの数が1つの地区の人口よりも少ない場合

( $qkN < N$ , すなわち  $qk < 1$ )

数値例の検討から、考察を始めることにしよう。いま仮に、 $q=0.01$ ,  $N=10$ と定める。

(i)  $k=10$ の場合 ( $q=0.01$ ,  $N=10$ )

この条件下で、指標が最大となるのは、表1のような場合である。これはまた、同じ条件下における最小値でもある(前稿の表2と同じである)。すなわち、この条件下においては、最大値と最小

1) 本稿は前稿(海野, 1977)の続稿であるので、本稿の基本的性質は、前稿のそれを継承する。特に注1), 2), 4), 5)を参照。なお、分結指数に関する全般的議論については、(Duncan and Duncan, 1955), (Taeuber and Taeuber, 1965), (安田・海野, 1977)などを参照せよ。

2)  $D$ の定義式には(相互に恒等な)種々のものがあるが、以下の議論では次式を用いる。

$$D = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left| \frac{N_i}{N} - \frac{W_i}{W} \right|$$

ここで、 $n$ :地区数、 $N_i$ : $i$ 地区の黒人数、 $N$ :黒人の総数、 $W_i$ : $i$ 地区の白人数、 $W$ :白人の総数である。詳しくは、(安田・海野, 1977)を参照せよ。

3) ここでは、考察中の地域が、人口の等しい複数の地区に分割されている、と仮定している。

値が等しくなる。

表1 各地区における黒人と白人の分布  
( $q=0.01, N=10, k=10$ )

地区	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	合計
黒人	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
白人	9	10	10	10	10	10	10	10	10	10	99
合計	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	100

(ii)  $k=20$ の場合 ( $q=0.01, N=10$ )

この条件下で指標の値が最大となるのは、表2のような場合である。この表から、 $D$ の最大値( $D_{max}$ )は、次のように算出される。

表2 各地区における黒人と白人の分布  
( $q=0.01, N=10, k=20$ )

地区	1	2	3	4	5	6	...	...	...	20	合計
黒人	2	0	0	0	0	0	...	...	...	0	2
白人	8	10	10	10	10	10	...	...	...	10	198
合計	10	10	10	10	10	10	...	...	...	10	200

$$\begin{aligned}
 D_{max} &= \frac{1}{2} \left\{ \left| \frac{2}{2} - \frac{8}{198} \right| \times 1 + \left| \frac{0}{2} - \frac{10}{198} \right| \times 19 \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{198-8}{198} + \frac{10 \times 19}{198} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{190}{198} + \frac{190}{198} \right\} \\
 &= \frac{190}{198}
 \end{aligned}$$

(iii)  $k=30$ の場合 ( $q=0.01, N=10$ )

上の場合と同様に、この場合の  $D_{max}$  は次のように算出できる。

$$\begin{aligned}
 D_{max} &= \frac{1}{2} \left\{ \left| \frac{3}{3} - \frac{7}{297} \right| \times 1 + \left| \frac{0}{3} - \frac{10}{297} \right| \times 29 \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{290}{297} + \frac{290}{297} \right\} = \frac{290}{297}
 \end{aligned}$$

(iv)  $qk < 1$  の場合の一般形

以上の議論および表3から、この場合の  $D_{max}$

表3 各地区における黒人と白人の分布  
( $qk < 1$  の場合の一般形)

地区	1	2	3	4	5	6	.....	k	合計
黒人	$qkN$	0	0	0	0	0	.....	0	$qkN$
白人	$N - qkN$	$N$	$N$	$N$	$N$	$N$	.....	$N$	$kN - qkN$
合計	$N$	$N$	$N$	$N$	$N$	$N$	.....	$N$	$kN$

は次のようになることが分かる。

$$\begin{aligned}
 D_{max} &= \frac{1}{2} \left\{ \left| \frac{qkN}{qkN} - \frac{N - qkN}{kN - qkN} \right| \times 1 \right. \\
 &\quad \left. + \left| \frac{0}{qkN} - \frac{N}{kN - qkN} \right| \times (k-1) \right\} \\
 &= \frac{k-1}{k-qk} \quad \dots(1)
 \end{aligned}$$

§1.2. マイノリティーの数が1つの地区の人口に等しい場合

( $qkN=N, すなわち qk=1$ )

表4から、この場合の  $D_{max}$  は次のようになる。

表4 各地区における黒人と白人の分布  
( $qk=1$  の場合の一般形)

地区	1	2	3	4	5	6	...	...	...	k	合計
黒人	$N$	0	0	0	0	0	...	...	...	0	$N$
白人	0	$N$	$N$	$N$	$N$	$N$	...	...	...	$N$	$(k-1)N$
合計	$N$	$N$	$N$	$N$	$N$	$N$	...	...	...	$N$	$kN$

(注)  $qk=1$  のえ、 $qkN=N, (1-q)kN=(k-1)N$

$$\begin{aligned}
 D_{max} &= \frac{1}{2} \left\{ \left| \frac{N}{N} - \frac{0}{(k-1)N} \right| \times 1 \right. \\
 &\quad \left. + \left| \frac{0}{N} - \frac{N}{(k-1)N} \right| \times (k-1) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{N(k-1)}{(k-1)N} \right\} = 1 \quad \dots(2)
 \end{aligned}$$

(2)式は、また、(1)式の特殊な場合である。すなわち、(1)式に  $qk=1$  を代入すると、(2)式と同じ結果が得られる。

§1.3.  $N < qkN < 2N, すなわち, 1 < qk < 2$  の場合

表5 各地区における黒人と白人の分布  
( $1 < qk < 2$  の場合の一般形)

地区	1	2	3	4	5	6	.....	k	合計
黒人	$N$	$(qk-1)N$	0	0	0	0	.....	0	$qkN$
白人	0	$(2-qk)N$	$N$	$N$	$N$	$N$	.....	$N$	$(1-q)kN$
合計	$N$	$N$	$N$	$N$	$N$	$N$	.....	$N$	$kN$

表5から、 $D_{max}$  は次のように算出できる。

$$\begin{aligned}
 D_{max} &= \frac{1}{2} \left\{ \left| \frac{N}{qkN} - \frac{0}{(1-q)kN} \right| \times 1 \right. \\
 &\quad + \left| \frac{(qk-1)N}{qkN} - \frac{(2-qk)N}{(1-q)kN} \right| \times 1 \\
 &\quad \left. + \left| \frac{0}{qkN} - \frac{N}{(1-q)kN} \right| \times (k-2) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{qk} + \frac{|qk-q-1|}{q(1-q)k} + \frac{k-2}{(1-q)k} \right\} \dots\dots(3)
 \end{aligned}$$

- (1)  $qk-q-1 > 0$  (すなわち,  $q > 1/(k-1)$ ,  $k > 1+1/q$ ) のとき,

$$\begin{aligned}
 D_{max} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{qk} + \frac{qk-q-1}{q(1-q)k} + \frac{k-2}{(1-q)k} \right\} \\
 &= \frac{k-2}{(1-q)k} = \frac{k-2}{k-qk} \dots\dots(4)
 \end{aligned}$$

- (2)  $qk-q-1 = 0$  (すなわち,  $q = 1/(k-1)$ ,  $k = 1+1/q$ ) のとき,

$$\begin{aligned}
 D_{max} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{qk} + \frac{k-2}{(1-q)k} \right\} \dots\dots(5) \\
 &= \frac{k-1}{k}
 \end{aligned}$$

(5)式は(4)式の特殊な場合である。すなわち, (4)式に  $q = 1/(k-1)$  を代入すると, (5)式が得られる。

- (3)  $qk-q-1 < 0$  (すなわち,  $q < 1/(k-1)$ ,  $k < 1+1/q$ ) のとき,

仮定から,  $1 < qk < 2$ 。したがって,

$$\frac{1}{q} < k < \frac{2}{q} \dots\dots(6)$$

また,  $q$  の定義から  $0 < q < 1$ 。したがって,

$$1 + \frac{1}{q} < \frac{2}{q} \dots\dots(7)$$

(6), (7)より,  $k$  は次の不等式を満たさなければならない。

$$\frac{1}{q} < k < 1 + \frac{1}{q} \dots\dots(8)$$

しかし,  $k$  は正整数ゆえ, (8)式を満たす  $k$  は存在しない。

§ 1.4.  $2N = qkN$ , すなわち,  $qk = 2$  の場合

この場合,  $D$  のとりうる最大値  $D_{max}$  は, 明ら

かに 1.0 である。2つの地区にはマイノリティーだけが住み, 残りの地区にはマジョリティーだけが住むとき, この値が実現する。

さらにまた, この結果は(4)式の特殊な場合でもある。実際, (4)式に  $qk = 2$  を代入すると,  $D_{max} = 1$  が得られる。

§ 1.5.  $2N < qkN < 3N$ , すなわち,  $2 < qk < 3$  の場合

表 6 各地区における黒人と白人の分布  
( $2 < qk < 3$  の場合の一般形)

地区	1	2	3	4	5	6	.....	k	合 計
黒 人	N	N	(qk-2)N	0	0	0	.....	0	qkN
白 人	0	0	(3-qk)N	N	N	N	.....	N	(1-q)kN
合 計	N	N	N	N	N	N	.....	N	kN

表 6 から,  $D_{max}$  は次のように算出される。

$$\begin{aligned}
 D_{max} &= \frac{1}{2} \left\{ \left| \frac{N}{qkN} - \frac{0}{(1-q)kN} \right| \times 2 \right. \\
 &\quad + \left| \frac{(qk-2)N}{qkN} - \frac{(3-qk)N}{(1-q)kN} \right| \times 1 \\
 &\quad \left. + \left| \frac{0}{qkN} - \frac{N}{(1-q)kN} \right| \times (k-3) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{2}{qk} + \frac{|qk-2-q|}{q(1-q)k} + \frac{k-3}{(1-q)k} \right\} \dots\dots(9)
 \end{aligned}$$

- (1)  $qk-2-q > 0$  ( $q > 2/(k-1)$ ,  $k > 1+2/q$ ) のとき,

$$\begin{aligned}
 D_{max} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{2}{qk} + \frac{qk-2-q}{q(1-q)k} + \frac{k-3}{(1-q)k} \right\} \\
 &= \frac{k-3}{k-qk} \dots\dots(10)
 \end{aligned}$$

- (2)  $qk-2-q = 0$  ( $q = 2/(k-1)$ ,  $k = 1+2/q$ ) のとき,

$$D_{max} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2}{qk} + \frac{k-3}{(1-q)k} \right\} = \frac{k-1}{k} \dots\dots(11)$$

(10)式に  $q = 2/(k-1)$  を代入すると(11)式が得られる。ここから, (11)式は(10)式の特殊な場合であることが明らかになる。

- (3)  $qk-2-q < 0$  ( $q < 2/(k-1)$ ,  $k < 1+2/q$ ) の

とき、

仮定から、 $2 < qk < 3$ 。すなわち、

$$\frac{2}{q} < k < \frac{3}{q}$$

§ 1.5. (3)と同様の推論により、

$$\frac{2}{q} < k < 1 + \frac{2}{q} \quad \dots\dots(12)$$

しかし、 $k$  は定義により正整数ゆえ、(12)式を満足する  $k$  は存在しない。

§ 1.6.  $3N = qkN$ 、すなわち、 $qk = 3$  の場合

この場合に  $D_{max}$  が 1.0 の値をとることは、明らかである。すなわち、3つの地区にはマイノリティーだけが住み、残りの地区にはマジョリティーだけが住むとき、この値が実現する。

また、この値は、(10)式の特殊な場合でもある。実際、(10)式に  $qk = 3$  を代入すると、 $D_{max} = 1$  が得られる。

§ 1.7. 分結指数のとりうる最大値——その最終的定式化

以上の議論の結果は、表7に要約できる。さらに、表7を縮約すると表8が得られる。(この縮約がなぜ可能かについては、これまでの議論の中に述べられている。)

表8から、次の定理が得られる。

表7 非類似係数  $D$  のとりうる最大値

$qk$	$k$	$D_{max}$
$qk < 1$	$k < 1/q$	$(k-1)/(k-qk)$
$qk = 1$	$k = 1/q$	1.0
$1 < qk < 2$	$1/q < k < 2/q$	no solution
	$k < 1 + 1/q$	$(k-1)/k$
	$k > 1 + 1/q$	$(k-2)/(k-qk)$
$qk = 2$	$k = 2/q$	1.0
$2 < qk < 3$	$2/q < k < 3/q$	no solution
	$k < 1 + 2/q$	$(k-1)/k$
	$k > 1 + 2/q$	$(k-3)/(k-qk)$
$qk = 3$	$k = 3/q$	1.0

表8 非類似係数  $D$  のとりうる最大値 (要約)

$qk$	$D_{max}$
$qk \leq 1$	$(k-1)/(k-qk)$
$1 < qk \leq 2$	$(k-2)/(k-qk)$
$2 < qk \leq 3$	$(k-3)/(k-qk)$

〔定理〕 非類似指数のとりうる最大値

ある地域が  $k$  個の地区に分けられているとする。また、各地区の居住者数は等しいと仮定する ( $N$ 人)。

このとき、非類似係数  $D$  のとりうる最大値  $D_{max}$  は、各地区の居住者数  $N$  のいかにかわらず、次の式で与えられる。

$$D_{max} = \frac{k - [qk]}{k - qk} \quad \dots\dots(13)$$

ここで、

$q$  : 当該地域におけるマイノリティーの比率 ( $0 < q < 1$ )

$k$  : 当該地域中の地区の数

また、

$$[x] = n \quad (n-1 < x \leq n, \quad n : \text{正整数})$$

である。

この定式化により、冒頭に引用した Tauber & Tauber の議論が誤りであることが明らかになった。しかし、それを明確に示すためには、 $D_{max}$  の挙動を分析する必要がある。

§ 2. 非類似係数  $D$  のとりうる最大値 ( $D_{max}$ ) —— その値の挙動

ここでは、前稿と同様の戦略をとる。すなわち、(13)式を用いて、種々の場合における  $D_{max}$  の値を計算し、その値の挙動を観察する。次に、その観察から得られた仮説を、解析的方法により証明する。

§ 2.1.  $D_{max}$  の値の挙動の観察

前稿と同様に、 $q = 0.005, 0.01, 0.02$  の各条件のもとで、 $k$  の値を変化させてみよう。(13)式を用

表9  $q, k$  の変化にともなう  $D_{max}$  の変化 (43式による)

$q \backslash k$	$q=0.005$			$q=0.01$			$q=0.02$		
	$k-[qk]$	$k-qk$	$D_{max}$	$k-[qk]$	$k-qk$	$D_{max}$	$k-[qk]$	$k-qk$	$D_{max}$
10	9.	9.9	0.9045	9.	9.9	0.9091	9.	9.8	0.9184
20	19.	19.9	0.9548	19.	19.8	0.9596	19.	19.6	0.9694
30	29.	29.8	0.9715	29.	29.7	0.9764	29.	29.4	0.9864
40	39.	39.8	0.9799	39.	39.6	0.9848	39.	39.2	0.9949
50	49.	49.8	0.9849	49.	49.5	0.9899	49.	49.0	1.0000
60	59.	59.7	0.9883	59.	59.4	0.9933	58.	58.8	0.9864
70	69.	69.6	0.9907	69.	69.3	0.9957	68.	68.6	0.9913
80	79.	79.6	0.9925	79.	79.2	0.9975	78.	78.4	0.9949
90	89.	89.5	0.9939	89.	89.1	0.9989	88.	88.2	0.9977
100	99.	99.5	0.9950	99.	99.0	1.0000	98.	98.0	1.0000
110	109.	109.4	0.9959	108.	108.9	0.9917	107.	107.8	0.9926
120	119.	119.4	0.9966	118.	118.8	0.9933	117.	117.6	0.9949
130	129.	129.3	0.9973	128.	128.7	0.9946	127.	127.4	0.9969
140	139.	139.3	0.9978	138.	138.6	0.9957	137.	137.2	0.9985
150	149.	149.2	0.9983	148.	148.5	0.9966	147.	147.0	1.0000
160	159.	159.2	0.9987	158.	158.4	0.9975	156.	156.8	0.9949
170	169.	169.1	0.9991	168.	168.3	0.9982	166.	166.6	0.9964
180	179.	179.1	0.9994	178.	178.2	0.9989	176.	176.4	0.9977
190	189.	189.0	0.9997	188.	188.1	0.9995	186.	186.2	0.9989
200	199.	199.0	1.0000	198.	198.0	1.0000	196.	196.0	1.0000
210	208.	208.9	0.9955	207.	207.9	0.9957	205.	205.8	0.9961
220	218.	218.9	0.9959	217.	217.8	0.9963	215.	215.6	0.9972
230	228.	228.8	0.9963	227.	227.7	0.9969	225.	225.4	0.9982
240	238.	238.8	0.9966	237.	237.6	0.9975	235.	235.2	0.9991
250	248.	248.7	0.9970	247.	247.5	0.9980	245.	245.0	1.0000
260	258.	258.7	0.9973	257.	257.4	0.9984	254.	254.8	0.9969
270	268.	268.6	0.9976	267.	267.3	0.9989	264.	264.6	0.9977
280	278.	278.6	0.9978	277.	277.2	0.9993	274.	274.4	0.9985
290	288.	288.5	0.9981	287.	287.1	0.9997	284.	284.2	0.9993
300	298.	298.5	0.9983	297.	297.0	1.0000	294.	294.0	1.0000
310	308.	308.4	0.9985	306.	306.9	0.9971	303.	303.8	0.9974
320	318.	318.4	0.9987	316.	316.8	0.9975	313.	313.6	0.9981
330	328.	328.3	0.9989	326.	326.7	0.9979	323.	323.4	0.9988
340	338.	338.3	0.9991	336.	336.6	0.9982	333.	333.2	0.9994
350	348.	348.2	0.9993	346.	346.5	0.9986	343.	343.0	1.0000
360	358.	358.2	0.9994	356.	356.4	0.9989	352.	352.8	0.9977
370	368.	368.1	0.9996	366.	366.3	0.9992	362.	362.6	0.9983
380	378.	378.1	0.9997	376.	376.2	0.9995	372.	372.4	0.9989
390	388.	388.0	0.9999	386.	386.1	0.9997	382.	382.2	0.9995
400	398.	398.0	1.0000	396.	396.0	1.0000	392.	392.0	1.0000

いとこの結果は、表9のようになる。これを図示したものが、図1、図2、図3である<sup>4)</sup>。

この図を観察すると、次のような仮説が得られ

る。

- (1)  $D_{max}$  は、 $k$  の変化にともなって、周期的に変化する。変化の周期は  $1/q$  である。

4) 図の作成に際しては、表10も参照した。

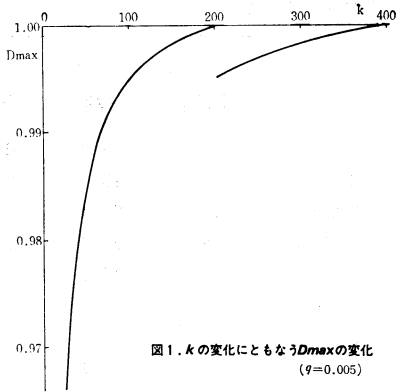


図1.  $k$  の変化にともなう  $D_{max}$  の変化 ( $q=0.005$ )

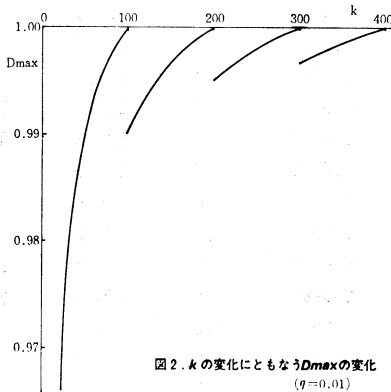


図2.  $k$  の変化にともなう  $D_{max}$  の変化 ( $q=0.01$ )

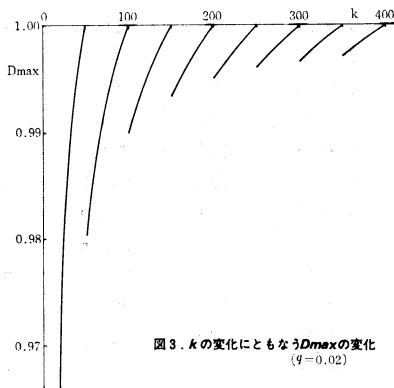


図3.  $k$  の変化にともなう  $D_{max}$  の変化 ( $q=0.02$ )

- (2)  $D_{max}$  は、 $k=n/q$  (ここで、 $n=1, 2, \dots$ ) のとき 1.0 の値をとる。
- (3) 各「周期」内では、すなわち、 $[qk]$  の値が一定の範囲内では、 $D_{max}$  の値は単調に増大する。しかし、増加率は単調に減少する。
- (4) 各「周期」内における  $D_{max}$  の最小値は、 $k$  の増大につれて増大する。

以上の観察結果をもとに、次節では、 $D_{max}$  の挙動を、解析的方法を用いて分析しよう。

### §2.2. 解析的方法による $D_{max}$ の値の挙動の分析

前節で見出した観察結果を、解析的方法によって検討しよう。これらの命題は、§1.7. に記した〔定理〕の系を構成する。

〔系1〕  $k$  の変化にともない、 $D_{max}$  は  $1/q$  の「周期」で変化する。

証明：定義から、 $[qk]$  は  $k$  の階段関数 (step function) であり、 $k$  が  $1/q$  増加することに1だけ増加する。他方、 $D_{max}$  の他の要素 ( $k, qk$ ) は、連続に変化する。したがって、 $D_{max}$  は、 $[qk]$  が1だけ増加することに、不連続な変化をする。すなわち、 $D_{max}$  の「周期」は  $1/q$  である。(ただし、ここでは、 $k$  が正整数であり、したがって  $D_{max}$  はいかなる点においても連続ではない、という事実は無視している。)

〔系2〕  $D_{max}$  は、 $k=n/q$  (ここで、 $n=1, 2, \dots$ ) のとき 1.0 の値をとる。

証明：(1)式の  $k$  に  $n/q$  を代入すると、 $D_{max}$  の値は次のようになる。

$$D_{max} = \frac{k - [qk]}{k - qk} = \frac{n/q - [n]}{n/q - n} = \frac{n/q - n}{n/q - n} = 1$$

〔系3〕 各「周期」内において、すなわち、 $[qk]$  の値が一定の範囲内において、 $D_{max}$  の値は単調に増大する。しかし、増加率は単調に減少する。

証明： $[qk]$  が一定の範囲内においては、

$$D_{max} = g(k) = \frac{k - c}{k - qk} = \frac{1}{1 - q} \cdot \frac{k - c}{k}$$

ここで、

$$c = [qk].$$

$g(k)$  を  $k$  で微分すると<sup>5)</sup>,

5)  $k$  は正整数であるから、正しくは、 $g(k)$  は微分可能ではない。しかし、前稿の注10)と同様、近似的方法として用いた。

$$\frac{dg(k)}{dk} = \frac{1}{1-q} \cdot \frac{k-(k-c)}{k^2}$$

$$= \frac{c}{(1-q)k^2} > 0$$

$$\therefore 1-q > 0, c > 0, k^2 > 0$$

さらに、 $k$  で微分すると、

$$\frac{d^2g(k)}{dk^2} = \frac{c}{1-q} \cdot \frac{-2k}{k^4}$$

$$= \frac{c}{1-q} \cdot \frac{-2}{k^3} < 0$$

$$\therefore 1-q > 0, c > 0, k^3 > 0$$

〔系 4〕 各「周期」内の  $D_{max}$  の極小値は、 $k$  の増大につれて増大する。

証明：各「周期」内の極小値は、 $k = n/q + 1$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) のとき生じる。

$k$  がこのような値をとるとき、

$$qk = n + q$$

$$[qk] = n + 1$$

したがって、

$$k - [qk] = \left(\frac{n}{q} + 1\right) - (n + 1)$$

$$= \frac{n}{q} - n = \frac{n(1-q)}{q}$$

$$k - qk = \left(\frac{n}{q} + 1\right) - (n + q)$$

$$= \frac{(n+q) - (n+q)q}{q} = \frac{(n+q)(1-q)}{q}$$

ゆえに、 $k = n/q + 1$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) のとき、 $D_{max}$  は、

$$D_{max} = \frac{k - [qk]}{k - qk} = \frac{n}{n+q} = h(n)$$

ここから、

$$h'(n) = \frac{q}{(n+q)^2} > 0$$

$$h''(n) = \frac{-2q}{(n+q)^3} < 0$$

また、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+q}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{q}{n}} = 1$$

なお、各「周期」内の最小値を実際に算出すると、表10のようになる。したがって、第1「周期」を除けば、各「周期」内の最小値は十分に大きい(すなわち、1に近い)。 $q$  の値が大きくなると

表10  $[qk]$ ,  $q$  の変化にともなう  $D_{max}$  の極小値の変化

$[qk]$	$q$							
	$q=0.005$		$q=0.01$		$q=0.02$		$q=0.2$	
-1	$k$	$D_{max}$	$k$	$D_{max}$	$k$	$D_{max}$	$k$	$D_{max}$
0	10.0		10.0		10.0		1	0.0
1	201	0.9950	101	0.9901	51	0.9804	6	0.8333
2	401	0.9975	201	0.9950	101	0.9901	11	0.9091
3	601	0.9983	301	0.9967	151	0.9934	16	0.9375
4	801	0.9988	401	0.9975	201	0.9950	21	0.9524
5	1001	0.9990	501	0.9980	251	0.9960	26	0.9615
6	1201	0.9992	601	0.9983	301	0.9967	31	0.9677
7	1401	0.9993	701	0.9986	351	0.9972	36	0.9722
8	1601	0.9994	801	0.9988	401	0.9975	41	0.9756

き(たとえば  $q=0.2$  のとき)には、第2周期以降も  $D_{max}$  の最小値は、1との差を無視できるほどではない。しかし、この場合には、「周期」は進んでいても、 $k$  の値は、それほど大きくはない。他方、 $q$  の値が小さい場合、小さな  $k$  の値は第1「周期」にふくまれ、このときの  $D_{max}$  の値は必ずしも大きくはない。要するに、 $k$  の値が小さい時には、 $D_{max}$  と1との差を無視できない可能性がある、ということに留意しなければならないのである。

### § 3. 結 語

Taeuber & Taeuber (1976) の示唆——それは、結果的には誤りであることが判明した——から出発し、われわれは、ここに、非類似係数  $D$  のとりうる最大値  $D_{max}$  を定式化した。前稿の § 1. 4. で提出した課題(2)を解決したわけである。

残された課題には、各地区の人口が等しくない場合への拡張、指数の補正などがある。しかし、実際に経験的研究を行なう立場からいうならば、前稿において得られた知見(とくに前稿の〔表 9〕を参照)と考えあわせると、次のような実際の留意事項が抽出できよう。

〔注意 1〕 非類似係数  $D$  のとりうる最大値  $D_{max}$  は、地区数  $k$  の値が十分大きいとき(およそ  $k \geq 100$ )には、近似的に 1.0 とみなしてさしつかえない(誤差 1% 以内)。

しかし、 $k$  の値が比較的小さいとき(たと

えば  $k \leq 50$ ) には、 $q$  の値をも考慮しつつ、(13)式を用いて、 $D_{max}$  の挙動に注意する必要がある。

〔注意2〕非類似係数  $D$  のとりうる最小値  $D_{min}$  は、 $q$  の値がある程度大きいならば（たとえば  $q \geq 0.1$ ）、各地区内の居住者数が十分に大きいとき、 $0.0$  とみなしてさしつかえない<sup>6)</sup>。

しかし、 $q$  の値が小さいとき（たとえば  $q < 0.1$ ）には、 $D_{min}$  を  $0.0$  とみなし得ない場合もあるので、前稿(14)式を用いて、その挙動に十分注意する必要がある。

(1978年12月6日脱稿)

#### 謝 辞：

本稿は、社会科学国際フェロー（通称・新渡戸フェロー）として The University of Chicago に滞在中に作成したものである。2年間の留学の機会を与えて下さった国際文化会館、長期の不在を御許し下さった関西学院に謝意を表したい。ま

た、小松敏彦氏（大阪大学大学院）には、校正の労をとっていただいた。記して感謝したい。

#### 引用文献

- Cortese, Charles F., R. Frank Falk, and Jack K. Cohen,  
1976 "Further Considerations on the Methodological Analysis of Segregation Indices," *American Sociological Review*, 41: 630—637.
- Duncan, O. D. and B. Duncan,  
1955 "A Methodological Analysis of Segregation Indexes," *American Sociological Review* 20: 210—217.
- Tauber, Karl E. and Alma F. Tauber,  
1965 *Negroes in Cities*. Chicago: Aldine.
- 1976 "A Practitioner's Perspective on the Index of Dissimilarity," *American Sociological Review*, 41: 884—889.
- 海野道郎,  
1977 「分結指数の検討——方法論的考察」, 『関西学院大学社会学部紀要』35: 49—60。
- 安田三郎・海野道郎,  
1977 『改訂2版・社会統計学』東京: 丸善。

6) たとえば、 $q=0.1$  の場合、 $[qN]=30$  (すなわち  $N=300$ ) のときの極大値は  $0.0091$  となり、誤差は  $1\%$  以内となる。