パラメータに制約のある回帰推定について

中　山　慶　一　郎

I．はじめに

回帰分析における通常の推定法，例えば通常の最小２乗法 (Ordinary Least Square Method) では，研究者の事前情報 (a priori information) は採用する関数形や誤差分布のパラメータに取り入れられた後標本から推定値を求めるのが普通である。その場合，研究者がパラメータについて事前の情報を持っていることが多く，例えば，パラメーターの値とか，パラメータの比，一次結合の値，単にパラメータの符号など，何んらかの知識を持っていることが多い。これらの知識は過去の調査による経験とか，理論から生ずるもので，これを外生情報 (extraneous information) という。

最小２乗法によるパラメータの推定に外生情報を取り入れる推定方法は，制約付最小２乗法 (Restricted Least Square Method)　と呼ばれている。制約付最小２乗法は，パラメータが確定した線形制約 (exact linear restrictions) を有する場合に適用される。また，パラメータが正の値をもつとか，０と１の間の値を持つとかいうような一次不等式の制約を有する場合の推定方法について，Theil と Goldberger [３] は，一般化最小２乗法 (Generalized Least Square Method) に，制約式に確率誤差項を有する線形の関係式を導入してこの問題に対する接近法を示した。この推定法を混合線形推定法 (Mixed Linear Regression Estimation) と呼んでいる。

分析家がパラメータ又はパラメータの組合せが正の符号を有し，大きさの程度が予想出るものであるというような先験的情報を有することがある。例えば、パラメータの和が１で値が非負であるという場合である。このように、パラメータに確定した線形制約と，定性的な不確定制約が共存する場合の推定方法を提出するのが本稿の目的である。

II．制約付最小２乗法

通常の最小２乗法のモデルは，行列で表示すると，

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{X\beta}+\mathbf{u} \qquad (2.1)$$

$\boldsymbol{y}$ は従属変数のT×１の列ベクトル，$\mathbf{X}$ は独立変数のT×Kの行列，$\boldsymbol{\beta}$は推定すべき係数のK×１の列ベクトル，$\mathbf{u}$ は残差でT×１の列ベクトルで，平均が零，分散は一定でσ^2と仮定する。すなわち，

$$\mathbf{Eu}=\mathbf{0} \qquad (2.2)$$

$$\mathbf{Euu}'=\boldsymbol{\sigma}^2\mathbf{I}_{1)} \qquad (2.3)$$

最小２乗法は誤差項の平方和を最小にするようなβの推定量ｂを与える。

$$\begin{aligned}\mathrm{S}&=(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})\\&=\mathbf{y}'\mathbf{y}-2\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{y}+\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\end{aligned}$$

Ｓをβについて微分して

$$\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial\boldsymbol{\beta}}=-2\mathbf{X}'\mathbf{y}+2\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$$

を０とおくと，正規方程式

1）Ｉは単位行列

$$\mathbf{X'y} = \mathbf{X'Xb} \qquad (2.4)$$

が得られ，

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'}\boldsymbol{y} \qquad (2.5)$$

となる。ただし **X′X** は非特異行列である。

(2.1) を (2.5) に代入して

$$\mathbf{b} = \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'u} \qquad (2.6)$$

であるから，$\mathrm{Eb}=\boldsymbol{\beta}$で，最小2乗推定量は不偏である。また，推定量の共分散行列は，

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[(\mathbf{b}-\boldsymbol{\beta})(\mathbf{b}-\boldsymbol{\beta})'] &= \mathrm{E}[(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'uu'X}(\mathbf{X'X})^{-1}] \\ &= \sigma^2(\mathbf{X'X})^{-1} \qquad (2.7) \end{aligned}$$

で与えられる。

推定すべきパラメータに対する先験的な情報が確定した線形制約式で表わされると，それを

$$\mathbf{R}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{r} \qquad (2.8)$$

と表わす。**r** はJ×1の既知のベクトル，**R** もJ×Kの既知行列であり，βは (2.1) の係数ベクトルである。かりに，βが線形の制約式 $\sum_{i=1}^{R}\beta_i = 1$ をもてば，

$$\mathbf{r} = \mathbf{1}, \quad \mathbf{R} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \cdots\cdots, \mathbf{1})$$ で表わされる。

制約付最小2乗法を用いると，$\mathbf{R}\boldsymbol{\beta}-\mathbf{r}=\mathbf{0}$ なる制約に従って誤差平方和 $(\boldsymbol{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\boldsymbol{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$ を最小にするようにβを選ぶことになる。従って，Lagrange 乗数を導入して，

$$\mathrm{S} = (\boldsymbol{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\boldsymbol{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) - 2\boldsymbol{\lambda}'(\mathbf{R}\boldsymbol{\beta}-\mathbf{r})$$

Sのβに関する微分を0とおいて推定量b^*を求めると，

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \boldsymbol{\beta}} = -\mathbf{X'}\boldsymbol{y} + \mathbf{X'Xb}^* - \mathbf{R'}\boldsymbol{\lambda} = 0$$

から

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^* &= (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'}\boldsymbol{y} + (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{R'}\boldsymbol{\lambda} \\ &= \mathbf{b} + (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{R'}\boldsymbol{\lambda} \qquad (2.9) \end{aligned}$$

$\mathbf{b} = (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'}\boldsymbol{y}$ は通常の最小2乗推定量である。

(2.9) の左からRをかけ

$$\mathbf{Rb}^* = \mathbf{Rb} + \mathbf{R}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{R'}\boldsymbol{\lambda}$$

$\mathbf{Rb}^* = \mathbf{r}$ であるから

$$\mathbf{Rb}^* = \mathbf{Rb} + \mathbf{R}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{R'}\boldsymbol{\lambda}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{Rb}^* = \mathbf{Rb} + \mathbf{R}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{R'}\boldsymbol{\lambda}$$

従って

$$\boldsymbol{\lambda} = [\mathbf{R}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{R'}]^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{Rb})$$

(2.9) に代入して

$$\mathbf{b}^* = \mathbf{b} + (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{R'}[\mathbf{R}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{R'}]^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{Rb}) \qquad (2.10)$$

となる。従って制約付きの推定量b^*は，制約なしの推定量bと，bが先験的制約条件を満し得ない程度 $(\mathbf{r}-\mathbf{Rb})$ の線形式だけ差があることを示している。

$\mathbf{b}^*$の標本特性は，$\mathbf{b} = \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'u}$ を (2.10) に代入して

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^* &= \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'u} + (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{R'}[\mathbf{R}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{R'}]^{-}\,[\mathbf{r}-\mathbf{R}\boldsymbol{\beta}-\mathbf{R}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{Xu}] \\ &= \boldsymbol{\beta} + [\mathbf{I}-(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{R'}[\mathbf{R}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{R'}]^{-1}\mathbf{R}](\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{Xu} \end{aligned}$$

であるから，$\mathrm{E}\mathbf{b}^* = \boldsymbol{\beta}$ で明らかに $\mathbf{b}^*$ は不偏である。また共分散行列は，

$$\mathrm{E}[(\mathbf{b}^*-\boldsymbol{\beta})(\mathbf{b}^*-\boldsymbol{\beta})'] = \sigma^2(\mathbf{X'X})^{-1}[\mathbf{I}-\mathbf{R'}[\mathbf{R}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{R'}]\,\mathbf{R}(\mathbf{X'X})^{-1}]$$

$$=\mathbf{V}-\mathbf{V}\mathbf{R}'(\mathbf{R}\mathbf{V}\mathbf{R}')^{-1}\mathbf{R}\mathbf{V} \quad (2.11)$$

である。ただし，$\mathbf{V}=\boldsymbol{\sigma}^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ はbの共分散分列である。

III. 混合推定法[2)]

混合推定法を述べる前に，一般化最小2乗法について述べる。線形モデルを $\boldsymbol{y}=\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\mathbf{u}$ とする。$\mathbf{Eu}=0$ $\mathbf{Euu}'=\boldsymbol{\Omega}$とする。$\boldsymbol{\Omega}$はモデル（2.1）で仮定された共分散行列$\boldsymbol{\sigma}^2\mathrm{I}$ではなく，任意の共分散行列である。いまuが多変量正規分布に従うと仮定すれば，尤度関数は

$$\mathrm{L}(\boldsymbol{\beta})=\frac{\mathbf{1}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\boldsymbol{\Omega}|^{\frac{1}{2}}}\mathbf{exp}\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})\right] \quad (3.1)$$

となる。

尤度は $(\boldsymbol{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$ が最小のとき最大尤度をもつ。すなわち一般化2乗和を最小にする一種の最小2乗推定量$\tilde{\mathbf{b}}$を求めることができる。二次形式S

$$\mathrm{S}=\mathbf{u}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{u}=(\boldsymbol{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$$

$$=\boldsymbol{y}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}-2\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{y}$$

を$\boldsymbol{\beta}$について微分し$\mathbf{0}$とおくと，

$$\frac{\partial\mathrm{S}}{\partial\boldsymbol{\beta}}=\mathbf{2X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}-\mathbf{2X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$$

から正規方程式

$$\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}=\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{y} \quad (3.2)$$

従って

$$\tilde{\mathbf{b}}=\hat{\boldsymbol{\beta}}=(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{y} \quad (3.3)$$

$\tilde{\mathbf{b}}$ は一般化最小2乗法による推定量で，A.C. Aitken によって提唱された方法である。

また，

$$\tilde{\mathbf{b}}=(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{y}=(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\mathbf{u})$$

$$=\boldsymbol{\beta}+(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{u}$$

であるから

$$\mathrm{E}\tilde{\mathbf{b}}=\boldsymbol{\beta} \quad (3.4)$$

推定量は不偏である。$\tilde{\mathbf{b}}$ の共分散行列は，

$$\mathrm{E}[(\tilde{\mathbf{b}}-\boldsymbol{\beta})(\tilde{\mathbf{b}}-\boldsymbol{\beta})']$$

$$=\mathrm{E}[(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{uu}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1}]$$

$$=(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \quad (3.5)$$

となる。もし，$\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\sigma}^2\mathbf{I}$の場合においては，(3.4)は(2.7)になる。

Theil と Goldlerger によって導入された混合推定はパラメータに対する制約が非確定的で，外生情報は

$$\mathbf{r}=\mathbf{R}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{v} \quad (3.6)$$

によって表現できる。$\boldsymbol{\nu}$ は確率項で

$$\mathrm{E}\boldsymbol{v}=\mathbf{0}, \quad \mathrm{E}\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{\Psi}$$

と定義される。例えば，ある係数β_1が所得弾力性で0と1の間にあるという先験的情報は

$$\frac{1}{2}=\beta_1+\nu, \quad \mathrm{E}\nu=0, \quad \mathrm{E}\nu^2=\frac{1}{16}$$

2）この節の内容は参考文献［3］に従っている。

と定義すれば，0と1の範囲の外のβ_1の値は2シグマ$(\frac{1}{2}\pm 2\sqrt{\frac{1}{16}})$の範囲の外にあることは殆んどないであろう。

パラメータについて不等式の制約をもつ場合の推定には，一般化最小2乗法を応用して次のように定式化する。

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{y} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} \boldsymbol{\beta} + \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix} \quad : \mathbf{E} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\mathrm{E}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix} [\mathbf{u}' \boldsymbol{v}'] \right) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Psi} \end{bmatrix} \qquad (3.7)$$

Aitken の一般化最小2乗法を応用すれば，βの推定量$\hat{\mathbf{b}}$は，

$$\hat{\mathbf{b}} = \left([\mathbf{X}'\mathbf{R}'] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Psi} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} \right)^{-1} [\mathbf{X}'\mathbf{R}'] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Psi} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{y} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} \qquad (3.8)$$

すなわち

$$\hat{\mathbf{b}} = [\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X} + \mathbf{R}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathbf{R}]^{-1}[\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{y} + \mathbf{R}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathbf{r}] \qquad (3.9)$$

となる。

また，$\boldsymbol{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}$，と$\mathbf{r} = \mathbf{R}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{v}$を(3.9)に代入すると

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{b}} &= [\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X} + \mathbf{R}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathbf{R}]^{-1}[(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X} + \mathbf{R}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathbf{R})\boldsymbol{\beta} + \mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{u} + \mathbf{R}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{v}] \\ &= \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X} + \mathbf{R}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathbf{R})^{-1}(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}'^{-1}\mathbf{u} + \mathbf{R}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{v}) \end{aligned}$$

となり

$$\mathrm{E}\hat{\mathbf{b}} = \boldsymbol{\beta} \qquad (3.10)$$

で推定量は不偏である。共分散行列は

$$\mathrm{E}(\hat{\mathbf{b}} - \boldsymbol{\beta})'(\hat{\mathbf{b}} - \boldsymbol{\beta})' = [\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X} + \mathbf{R}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathbf{R}]^{-1} \qquad (3.11)$$

となる。Durbin の接近法によれば

$$\hat{\mathbf{b}} \approx \tilde{\mathbf{b}} + (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X})\mathbf{R}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{R}\tilde{\mathbf{b}})$$

と変形できるので，$\hat{\mathbf{b}} = \tilde{\mathbf{b}}$の差は$\tilde{\mathbf{b}}$ が外生情報を満し得ない程度の同次一次関数である。

この方法を実際に適用するためには，$\boldsymbol{\Omega}$と$\boldsymbol{\Psi}$に関する情報が要求され，$\boldsymbol{\Psi}$を定めるには事前の情報が必要である。これは近似的には得られるであろう。$\boldsymbol{\Omega}$については，標本から推定することができる。

IV. 制約付混合最小2乗法

ここで，パラメータについて外生情報が確定的かつ非確定的なものを共に含む場合の処理を考察することにする。例えば，パラメーター$\boldsymbol{\beta}_i$の大きさが，$0 < \boldsymbol{\beta}_i < 1$で$\sum \boldsymbol{\beta}_i = 1$となる場合である。

線形モデルを

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u} \qquad (4.1)$$

$$\mathbf{Eu} = \mathbf{0} : \mathbf{Euu}' = \boldsymbol{\Omega} \qquad (4.2)$$

不等式の制約条件は

$$\boldsymbol{\gamma}_1 = \mathbf{R}_1\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{v} \qquad (4.3)$$

$$\mathrm{E}\boldsymbol{v} = \mathbf{0}, \quad \mathrm{E}\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{\Psi} \qquad (4.4)$$

確定的な線形制約は

$$\boldsymbol{\gamma}_2 = \mathbf{R}_2\boldsymbol{\beta} \qquad (4.5)$$

とする。

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{\gamma}_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{R}_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix} \quad \text{とおき}$$

$$\mathbf{EU} = \mathbf{0}, \mathbf{W} = \mathbf{E}[\mathbf{UU}'] = \mathbf{E}\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix}[\mathbf{u}' \boldsymbol{v}'] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Psi} \end{bmatrix} \qquad (4.6)$$

とすると，求める推定量は，

$$S=(\mathbf{Y}-\mathbf{Z}\boldsymbol{\beta})'\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{Y}-\mathbf{Z}\boldsymbol{\beta})-2\boldsymbol{\lambda}'(\mathbf{R}_2\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}_2)$$

を最小にする最小２乗推定量を求めることになる。

$$\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{\beta}}=-\mathbf{Z}'\mathbf{W}^{-1}\boldsymbol{y}+\mathbf{Z}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{Z}\boldsymbol{\beta}-\mathbf{R}_2'\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{0}$$

から，正規方程式

$$\mathbf{Z}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{b}=\mathbf{Z}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{Y}+\mathbf{R}_2'\boldsymbol{\lambda}$$

従って，推定量 $\mathbf{b}$ は，

$$\begin{aligned}\mathbf{b}&=(\mathbf{Z}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{Y}+(\mathbf{Z}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{R}_2'\boldsymbol{\lambda}\\&=\hat{\mathbf{b}}+(\mathbf{Z}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{R}_2'\boldsymbol{\lambda}\qquad(4.7)\end{aligned}$$

となる。

ここで，

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{b}}&=(\mathbf{Z}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{Y}\\&=\left([\mathbf{X}'\mathbf{R}_1']\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Omega}&0\\0&\boldsymbol{\Psi}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{X}\\\mathbf{R}_1\end{bmatrix}\right)^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{R}_1')\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Omega}&0\\0&\boldsymbol{\Psi}\end{bmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}\\\boldsymbol{r}_1\end{pmatrix}\\&=[\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}+\mathbf{R}_1'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathbf{R}_1]^{-1}[\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{y}+\mathbf{R}_1'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\gamma}_1]\end{aligned}$$

(4.7) の左から $\mathbf{R}_2$ をかけ

$$\mathbf{R}_2\mathbf{b}=\mathbf{R}_2\hat{\mathbf{b}}+\mathbf{R}_2(\mathbf{Z}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{R}_2'\boldsymbol{\lambda}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_2=\mathbf{R}_2\mathbf{b}=\mathbf{R}_2\hat{\mathbf{b}}+\mathbf{R}_2(\mathbf{Z}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{R}_2'\boldsymbol{\lambda}$$

したがって

$$\boldsymbol{\lambda}=[\mathbf{R}_2(\mathbf{Z}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{R}_2']^{-1}(\boldsymbol{\gamma}_2-\mathbf{R}_2\hat{\mathbf{b}})$$

いま，$(\mathbf{Z}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{Z})^{-1}=\mathbf{V}_M$ とおいて，(4.7) から

$$\mathbf{b}=\hat{\mathbf{b}}+\mathbf{V}_M\mathbf{R}_2'[\mathbf{R}_2\mathbf{V}_M\mathbf{R}_2']^{-1}(\boldsymbol{\gamma}_2-\mathbf{R}_2\hat{\mathbf{b}})\qquad(4.8)$$

となる。この推定量は (2.11) の制約付最小２乗法によるものと類似している。すなわち (2.10) において，$\mathbf{b}$ を $\hat{\mathbf{b}}$，$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ を $(\mathbf{Z}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{Z})^{-1}$ で置きかえたものである。従って推定量は $E\mathbf{b}=\hat{\mathbf{b}}$ という意味で不偏である。

V．おわりに

パラメータに先験的制約条件のある場合の回帰推定の問題は Goldberger［１］の要約によって整理されて居り，本稿でとりあげた問題は，Theil によって別の形で解決されている。3)

１次の制約式が確定的なものか，非確定的なものかに従って解法は異なる。確定的なものは，Lagrange の乗数を用いて解くことが出来るが，非確定的な制約条件は，混合推定を利用することになる。

参考文献

［１］ A. S. Goldberger, Econometric Theory, Wiely. 1964.

［２］ H. Theil, Economic Forecasts and Policy, North-Holland. 1961（岡本哲治訳，経済の予測と政策，創文社，1964）

［３］ H. Theil and A. S. Goldberger, On Pure and Mixed Statistical Estimation in Economics, International Economic Review, vol.2, no.1, 1961.

［４］ Ronald J. Wonnacott and T. H. Wonnacott, Econometrics, Wiely, 1970

3) この推定量は Theil と Dorfman によって１次の先験的限定条件のもとでの最良の１次不偏な回帰推定を求める所から別の方法で導出されている。参考文献［２］