ゲームの表現形式について

中 山 慶 一 郎

I. はじめに

人間の社会行動は利害関係がこみ入つて協調，対立が複雑にからみ合っているが，このような社会行動を明確な数学モデルによって定式化した理論として，ゲーム理論が存在することは周知の事実である。1944年に出版された von Neumann と Morgenstern との共著「ゲーム理論と経済行動」[1]以来，ゲーム理論は必らずしも直線的な進歩をたどってきたとは云えないが，n人ゲームの理論を中心として，理論的展開が進み，現実の問題の解決に役立つことが期待されるに至っている。

ゲーム理論は，von Neumann と Morgenstern によって開発されて以来，主として三つの形式によって理論展開が行われて来たと云える。すなわち，(1)展開形 (extensive from)，(2)標準形 (normalized form)，(3)特性関数形 (characteristic function form) である。

展開形による表現形式は，樹形図 (tree) を用いてゲームの構造を直観的に表現して居り，どのゲームも展開形によって明確に表現出来て，我々にはそのゲームの特徴を充分に把握出来るのである。

戦略 (strategy) という概念を導入して，ゲームを行列の形で表わしたものを，標準形という，標準形による分析は，ゲームの理論の解明に利用され，ゲーム理論の基本定理である minimax 解の証明が von Neumann によって与えられている。

2人ゲームは，最も単純で基本的なゲームであるが，プレイヤーの数が増えるにつれて，利害関係が複雑になり，ゲームに固有の現象であるプレイヤー間の結託，協調，対立，などが生じてくる。特性関数形のゲームは，結託 (coalition) という術語で表わされるプレイヤー間の協力によって得られる利得を定義したものである。特性関数形のn人ゲームは，von Neumann と Morgenstern によって始めて導入されたもので，ここに至ってゲーム理論の固有の領域を開拓し社会における人間行動の分析に役立つ理論として発展したのである。

本稿はゲーム理論の三つの表現形式と，それらの間の関連性について考察するものである。[1)]

II. 展開形によるゲーム

von Neuman と Morgenstern は展開形によるゲームの形式的記述を，プレイ (play)，人的手番 (personal move)，偶然手番 (chance move) 情報集合 (information set) などの概念を用い，公理主義的定式化を述べた。展開形によるゲームは幾何学的にはゲームの木によって表現されることは，von Neumann と Morgenstern によって指摘されているが， Kuhn [2] による定式化が，より直観的で見通しのよいものになっている。

ゲームの木とは，ループを持たない連結グラフである。連結グラフは点と，点と点を結ぶ通路を示す線の集まりから成り立っている。このグラフのどの2点をとっても，それらを結ぶ通路がただ1個存在するグラフを木 (tree) という。つまり

1) ゲーム理論を扱うために，ゲームを定義しておくことが必要であるので，簡単に述べておく。簡単な室内ゲームを考えるとよいが，ゲームは何人かの参加者 (player) によって行われる。ゲームが終了するとその結果によって参加者は利得 (payoff) を得る。勿論ゲームには，ゲームの進行についての規則 (rule) が必要である。

ゲームの実行をプレイ (play) という。ゲームは幾つかの手番 (move) によって構成される。各手番において参加者はある特定の手を選ぶのである。この手を選択 (choice) という。選択の仕方は参加者の意思で決定する場合と，偶然機構を用いる場合があるが，前者を人的手番 (personal move)，後者を偶然手番 (chance move) という。偶然手番の場合は，その選択肢に確率分布が指定されている。

木とは，ある点から出発して再び元の点に戻ることがない非サイクル的（acyclic）なグラフである。

ゲームの木の例として銅貨合せという簡単なゲームを考えてみる。2人のプレイヤーA，Bがそれぞれ1枚の銅貨を持っており，まずAが表Hか裏TをBに分からぬように示し，次ぎにBが表か裏を示す。両方とも同じ面であれば，AはBから1円もらい，異なる面であれば，AはBに1円払うことにする。これを木で表わせば,図1となる。

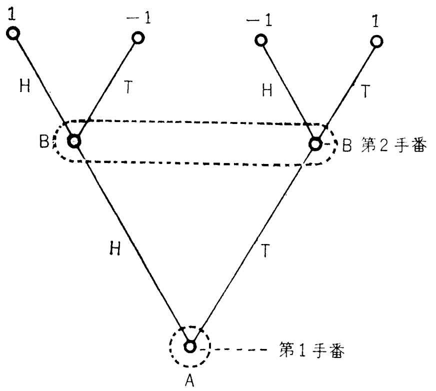


図1．ゲームの木

ここで，各点は手番（move）を示し，プレイヤーの選択が実行される。各点を結ぶ線分はプレイを表わし，その数は手番における選択肢の数，すなわち手の数に等しい。木の枝の端にはゲーム終了時の結果を記してある。各プレイヤーは手番において自分が利用可能な情報に制約がある場合が多い。プレヤーAは第1手番において，現在自分のいる位置について知っているのであるから完全情報を持っているが，プレヤーBは，Aの手について何んの知識もないわけであるから，第2手番のどちらの位置に自分が居るのか分らない。従って第2手番の2つの点を1つの集合と考えて，これ情報集合という。情報集合とは，プレヤーにとって識別不可能な手番の集合である。

ここで有限なn人ゲームの展開形を Kuhn に従って定義しよう。

1）展開形によるゲームの定義

定義，n人ゲームΓは次の性質をもつゲームの木である。

(1) 手番を n+1 個の集合 $P_0, P_1 \cdots, P_n$ に分割する。これをプレイヤー分割といい，P_0 は偶然手番，P_i $(i=1, \cdots, n)$ をプレイヤー i の人的手番という。

(2) 偶然手番 q における選択肢が r 個存在すれば $P=(p_1, p_2, \cdots p_r)$ なる確率分布が存在する。

(3) 各手番の集合は，幾つかの情報集合に分割される。1つの情報集合は，同一のプレヤーで，同数の選択肢を持つ。情報集合は互いに排反であり，偶然手番を含むものは，その点よりなる。

(4) 各プレイWに対し h(w) という利得又は支払関数（pay-off function）が定義される。

$$h(w)=(h_1(w), \cdots, h_n(w))$$

Kuhn による展開形ゲームの定化式は以上の通りであるが，各プレイヤーは自己の受取る利得 $h_i(w)$ を最大にするように行動することになる。

あるゲームに直面したプレイヤーは，彼の期待利得を最大にするためにゲームをプレイする問題に直面する。ゲームを実行するプレイヤーの完全な計画，即ち各手番でどのような手を選択するかという問題は，戦略(strategy)と呼ばれている。

2）戦　略

戦略には，いくつかの型がある。プレイヤ i の純粋戦略（pure strategy）とは，彼の各情報集合において，ある特定の手を選ぶ規則を表わすものである。プレイヤ i の純粋戦略を π_i なる関数で示すと，ある情報集合 U_i において，特定の手 e を選択するとすれば，人的手番の場合では，

$$\pi_i(U_i)=e \quad \text{ならば} \quad P_{\pi i}(e)=1$$
$$\text{その他} \qquad P_{\pi i}(e)=0$$

偶然手番のとき，$P_{\pi i}(e)$はeに対する確率を表わす。n人ゲームに対する純粋戦略は$\pi=(\pi_1, \cdots \pi_n)$で表わされ，情報集合での手について確率分布を定義する。従って純粋戦略πに対するプレイヤ i の期待利得（expected payoff）$H_i(\pi)$ は，

$$H_i(\pi)=\sum_{w} P_\pi(w) h_i(w)$$

で定義される。

プレイヤ i に対する混合戦略(mixed strategy)とは，彼の純粋戦略すべてにわたる確率化であるすなわちプレイヤの純粋戦略全体にわたる確率分布を設定することになる。

プレイヤに i 対する混合戦略 μ_i は，π_i に対し確率 $q_{\pi i}$ を割り当てるならば，n人ゲームの混合戦略 $\mu=(\mu_1, \cdots, \mu_n)$ は

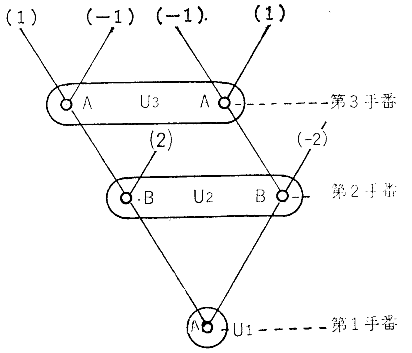
$$P\mu(w)=\sum_{\pi} q_{\pi 1}\cdots q_{\pi n} P_{\pi}(w)$$

によって与えられるプレイについての確率分布である。従って混合戦略に対するプレイヤ i の期待利得 $H_i(\mu)$ は，

$$H_i(\mu)=\sum_{w} P\mu(w) h_i(w) \quad i=1,2,\cdots,n$$

で定義される。

純粋戦略，および混合戦略は，ゲーム全体を通じての戦略であるが，手番の数がふえると，全体の戦略の数は莫大なものになるから，各手番において最適な戦略を選び，全体としても最適になる戦略とは何か，という多段階的思考が必要となる。プレイヤ i の行動戦略 (behavioral strategy) は，彼の各情報集合で選択した手に割り当てられた確率分布族である。



第2図

例えば，第2図で示されるゲームの木を考えてみる。第1手番でプレイヤAは2つの手のどちらかを選ぶ。第2手番では，プレイヤBは，第1手番でAがどちらを選んだかを知らずに，プレイを終えるか，継続するかを決める。第3手番では，ふたたびAが2つの手の1つをえらぶが，その時第1手番で自分のえらんだ手は憶えていないとする。図2に示すように，このゲームでの情報集合は U_1, U_2, U_3 の3つである。行動戦略はそれぞれの情報集合での可能な選択に対する確率分布である。そこで，まず情報集合 U_1 では，左側の手を確率 p_1，右側の手を確率 $1-p_1$ でえらぶとする。U_2 では，プレイの継続を確率 q で，プレイの終了を確率 $1-q$ で行ない，U_3 でも，左側の手を p_2，右側の手を確率 $1-p_2$ でえらぶ。従ってこ

$$U_1:(p_1, 1-p_1)$$
$$U_2:(q, 1-q)$$
$$U_3:(p_2, 1-p_2)$$

れらの確率の組合せが行動戦略のすべてである。いま，各プレイヤの手で，左側を1，右側を2とする。プレイヤAに対する純粋戦略を $\pi_A=(\pi_A(U_1), \pi_A(U_3))$，プレイヤBに対する純粋戦略を $\pi_B=\pi_B(U_2)$ で示す。π_B に対するAの利得期待値は，

π_B が1をえらんだとき，

$$p_1p_2-p_1(1-p_2)-(1-p_1)p_2+(1-p_1)(1-p_2)$$
$$=(2p_1-1)(2p_2-1)$$

π_B が2をえらんだとき，0

従って，Aが少くとも自分自身が確保出来る最大値は

$$\max_{0\leqq p_1\leqq 1,}\ \min_{0\leqq p_2\leqq 1}\ [(2p_1-1)(2p_2-1), 0]=0$$

すなわち，$p_1=p_2=1$ か，$p_1=p_2=0$ の行動戦略をとれば，ゲームの値は零である。[2)]

3）情　報

展開形ゲームにおいて重要な役割を演ずる要素にプレイヤの持つ情報がある。

すべての情報集合が，単一の頂点より構成されるゲーム，例えば，チェスとか，将棋のような室内ゲームでは，各プレイヤはあらゆるプレイヤの手について完全な知識を持っている。このようなゲームを完全情報 (perfect information) を持つゲームという。すなわち完全情報のゲームとは，各プレイヤは自分の手番に至る過去のゲームの歴史を知っているゲームである。完全情報のn人ゲームは，Nashの均衡点(equilibrium) をもつことが証明されている。また零和2人ゲームでは，均衡点は鞍点 (saddle point) である。

完全情報のゲーム以外のゲームは，不完全情報

2）この問題を標準形によって解いてみよう。プレイヤA，Bの利得行列は

A \ B	1	2
(1, 1)	1	0
(1, 2)	−1	0
(2, 1)	−1	0
(2, 2)	1	0

左の通りであるが，これは

	1	2
(1, 1)	1	0
(2, 2)	1	0

に縮約出来る。従って

Aの最適戦略 $P_A=(1, 0, 0, 0)$ か $(0, 0, 0, 1)$，Bの最適戦略は $P_B=(0, 1)$ ゲームの値は0である。

のゲーム(imperfect games with information) という。不完全情報のゲームは，1つの情報集合のなかに，2つ以上の頂点が含まれているものと考えてよい。不完全情報のゲームはプレイヤ自身及び相手の過去の手番について，完全な知識がない場合に生ずる。不完全情報のゲームは，自已の過去のプレイについて完全な記憶がない場合，相手のプレイについての情報に不足がある場合，また，ゲームに偶然手番が存在する場合に生ずる。

完全情報をもつ2人零和ゲームには，純粋戦略の解を持つことが，知られているが，Khun は，更に，完全情報を持ってn人一般和ゲームが純粋戦略の均衡点をもつことを示した。又Khun は，ポーカーのような完全記憶 (perfect recall) のゲームに最適な行動戦略の存在を示した。

展開形ゲームにおける情報は手番に関するものが，主に研究されて居り，各プレイヤが過去にとってきた手番について完全な情報が与えられる完全情報ゲームと，その情報が不完全な不完全情報ゲームとに分けることが出来る。

プレイヤの一部又は全部が，ゲームの規則についての情報が確実でない場合，例えば，利得関数，戦略などが知られていないようなゲームを，不完備情報のゲーム (games with imcomplete information) という。このようなゲームの定式化は困難である。それは不完備な情報についての推定を導入する必要があり，しかも，その推定が無限継起性を帯びていることによる。[3] 室内ゲームと違って，経済，軍事，政活，心理，教育など社会におけるゲームの状況下では，ゲームの参加者は，そのゲームの幾つかの重要な局面についての情報を欠いているのが普通である。従って，不完備情報ゲームの理論は，ゲーム理論の有用性からみて，その発展が期待される，今後に残された領域となっている。

Ⅲ. 標準形によるゲーム

プレイヤがゲーム全体を通じてのある戦略を用いることによって，単純化した形を，標準形のゲームという。例えば，次のような2人ゲームを考えてみる。プレイヤAの可能な戦略は，m通りであり，これに対するプレイヤBの戦略は，n通りであるとする。このような戦略を各プレイヤが選択したときの利得が与えられていると，ゲームは $m \times n$ 行列で表示でき，単純化される。2人ゲームの標準形は行列ゲームで表現出来る。

一般的に云えば，プレイヤ i が q 個の異なる情報集合を持てば，q 個の数の集合 $(y_1, y_2 \cdots y_q)$ によって表わされる純粋戦略が存在することになる。各手番では有限個の選択肢を有するので，y_i は整数で有限である。各手番で適当な手を選択することによって得られるプレイヤ i の純粋戦略を s_i とする。いま，偶然手番がなければ，各プレイヤによって選択される戦略の組 $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ は，プレイ α を決める。この戦略に対するプレイヤ i の利得は，関数Fによって決まる。

$$F_i(s_1, s_2, \cdots, s_n) = F_i(\alpha)$$

もし，偶然手番があれば，戦略 $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ の選択だけでは，プレイを一意的に決めることが出来ない。しかし，すべてのプレイにわたる確率分布が規定されているので，戦略 $(s_1, s_2, \cdots s_n)$ に関連した利得は，α の確率を $p(\alpha)$ とすると，

$$F_i(s_1, s_2, \cdots, s_n) = \sum p(\alpha) F_i(\alpha)$$ [4]

で表わされる。

展開形ゲームに戦略という概念を用いることによって,標準形のゲームにすることが可能である。標準形のゲームでは，各プレイヤは，1つの戦略を選ぶが，彼は他のプレイヤが，どの戦略を選択するかについての知識をもっていない。各プレイヤに対する利得は，利得関数 F_i によって決定さ

3) Harsanyi., "Games with incomplete informatlon played by Bayesian players," *Management Science*, 14 (1967) 例えば，プレイヤが互いに相手の利得関数を知らない2人ゲームを考えてみる。プレイヤ1の戦略の選択は，プレイヤ2の利得関数 U_2 について，プレイヤ1の推定に依存する。これをプレイヤ1の第1次の期待という。しかし，プレイヤ1の戦略の選択は，彼自身の利得関数 U_1 について，プレイヤ2の第1次の期待について彼が期待するものに依存する。これをプレイヤ1の第2次期待という。さらに，プレイヤ1の戦略は，プレイヤ2の第2次期待をどう期待するかに依存する。これはプレイヤ1の第3次の期待となるというふうに無限に続いて行く。

4) もしプレイ α と β が，利得 $Fi(\alpha)$，$Fi(\beta)$ をもち，α が確率 p，β が確率 $1-p$ をもつとすれば，α か β のどちらかが生ずる利得は $pFi(\alpha)+(1-p)Fi(\beta)$ となって，利得は線形で和をとることが正当化される。

れる。標準形ゲームは，最も単純なゲームの表現形式である。

標準形によるゲームでは， von Neumann と Morgensten によるゲーム理論の基本定理であるミニマックス定理以来，ゲームの最適解を求める研究が中心主題となっている。一般和 n 人ゲームでは，Nash の均衡点[5]の存在定理が重要である。Nash は，あらゆるゲームは少くとも一つの均衡点を混合戦略に存在することを示して，標準形ゲームは，非協力 n 人ゲームに拡張されている。

Ⅳ．特性関数形によるゲーム

ゲームのプレイにおいて，プレイヤ間の結託が生じ，自已の利得を有利に展開しようとする行動が生ずる。多数のプレイヤが参加し，お互いの利害が対立や協調関係を持つ複雑なゲームの状況を記述するためには，プレイヤの結託によって得られる値を定義する特性関数によって表現するのが有益である。

von Neumann と Morgenstern ［１］によれば n 人ゲームの特性関数は次のように定義されている。

n 人のプレイヤの集合 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ の任意の部分集合 S に対して定義される実数値関数 v があって，S と N－S が２つの結託を形成し，S と N－S との間でプレイしたときの S が獲得可能なマクシミン値が $v(s)$ である。$v(s)$ なる値は，結託 S が達成される，つまり結託に参加したプレイヤが協力し，ゲームを行う時に得る値を表わす。

この定義から，特性関数形のゲーム[6]は次の二つの条件さ満す。

（ｉ）　$v(\phi)=0$

S が空集合であれば $v(S)=0$ である。

S と T が互いに素な結託であれば，

(ii)　$v(S\cup T)\geqq v(S)+v(T)\quad S\cap T=\phi$

すなわち，S と T が協力することにより，少なくとも，それらが別々にプレイするときに得られるものを得ることは明白である。この性質を優加法性（super-additivity）という。

特性関数形のゲームは，最近，最も精力的に研究が進められている分野である。特性関数の定義について， von Neumann と Morgenstern は，移転可能な効用（transferable utility）を前提とし，手附け（side payment）を認める立場に立つが，手附けの存在を前提としない特性関数の一般化が試みられている。[7]

また，結託 S の残りのプレイヤ N－S が，必らずしも，一つにまとまった結託をしない場合は，分割関数形（partition function form）の理論となり，この場合には，優加法性は必らずしも満足しない。

協力 n 人ゲームの理論は，社会学や，行動科学に広範囲な応用分野を持っている。幅広い人間行動の複雑さから，このゲームの解には多くの種類の解が生ずる。ゲームの解とは，ゲーム終了時におけるプレイヤの配分である。零和２人ゲームでは，ゲームの解は一意性をもつが，n 人ゲームでは，そうとは限らない。

von Neumann と Morgenstern ［１］は，安定集合（stable set）を，ゲームの解として定義した。 この他に，コアー（core），シアプレイ値（Shapley Value），交渉集合（Bargaining sets）カーネル（kernel），仁（nucleolus）φ－安定（φ-stability）などが定義されている。[8]

Ⅴ．ゲームの表現形式と情報

一般にゲームの表現形を展開形から，標準形，更に特性関数形になるに従って，ゲームの表現は簡単になり，情報量は少なくなる。

いま，プレイヤの集合 N が，結託 S と，その補

5）プレイヤ i の受け取る金額を各人が手 $(x_1, x_2, \cdots, xn)$ を用いたとき，$Mi(x_1, x_2, \cdots, xn)$；$i=1, \cdots, n$ とすると，$Mi(x_1^*, x_2^*, \cdots, xn^*)\geqq Mi(x_1^*, \cdots, xi_{-1}^*, xi, xi_{+1}^*, \cdots, xn^*)$ をみたすような点 $(x_1^*, x_2^*, \cdots, xn^*)$ が均衡点である。

6）例えば，零和３人ゲームを［0,1］に正規化すると，特性関数を用いた表現では，
$v(\{1\})=0$，$v(\{2\})=0$，$v(\{3\})=0$，$v(\{1,2\})=1$，$v(\{2,3\})=1$，$v(\{1,3\})=1$，$v(\{1,2,3\})=1$ とすることが出来る。

7）R. J. Aumann, "A Survey of Cooperative Games without Side Payments", *Essays in Mathematical Economics*, ed. by M. Shubic, (1967)

8）鈴木光男編著「ゲーム理論の展開」昭48年 東京図書

集合N－Sに分割される特性関数形のゲームを考えてみる。これを標準形のゲームとして見れば，SとN－Sとの間の2人非協力ゲームであり，$v(S)$ はSの maximin 値である。このような定式化は元のゲームの詳細な形を省略することになる。手番の選択肢の数，選択の時点，情報の性質，利得関数などの情報が落ちてしまう。特性関数形は標準形，展開形に比らべると非常に制約されたものであるが，協力ゲームにおいて本質的なものである結託を表わすものとしては，最も適切なものである。

ゲームはその規則に従って，展開形で完全に記述されるが，戦略という概念を用いて標準形ゲームにすることが出来る。標準形ゲームでは，手番の選択肢，選択の時点，情報集合などの細かい情報が落ち，プレイヤは互いに相手の戦略を知ることなしに，同時に各戦略を選んでプレイすることになる。

展開形から標準形への変換には，プレイヤが選択する時点がなくなり，同時に各プレイヤは戦略を選ぶことになる。展開形ではプレイヤは各手番で手の選択を実行するとき，情報集合による情報を利用するが，標準形では利用可能でない。この点にゲームの解に微妙なくい違いが生じることが Auman and Maschler［3］によって指摘されている。以下のこの点を［3］に従いながら述べることにする。

零和2人行列ゲームの minimax 解は直観的に満足すべきものであり，均衡に到達する最適戦略であると，一般に認められている。Khun は，完全記憶の展開ゲームで最適行動戦略の存在を示した。

いま，次のような2人行列ゲームを考えることにしよう。プレイヤⅠ，Ⅱは各々戦略LとRをもち，利得行列の第1項はプレイヤⅠの利得を，第2項はプレイヤⅡの利得を表わすものとする。

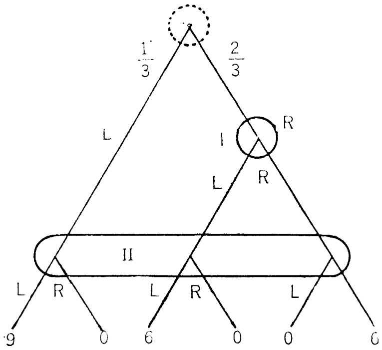
		Ⅱ L	Ⅱ R
Ⅰ	L	6，－7	0，0
	R	0，－3	6，－4

プレイヤⅠの利得行列に対する各プレイヤの最適戦略は，プレイヤⅠは $\left(\frac{1}{2}L,\ \frac{1}{2}R\right)$，プレイヤⅡは $\left(\frac{1}{2}L,\ \frac{1}{2}R\right)$ であり，ゲームの値は3である。この時，プレイヤⅠの戦略を単に $(p, 1-p), 0 \leqq p \leqq 1$ としても，プレイヤⅡの戦略が $\left(\frac{1}{2}L,\ \frac{1}{2}R\right)$ であれば，ゲームの値は変らないことに注意しておく必要がある。次にプレイヤⅡの利得行列に対する各プレイヤの最適戦略は，プレイヤⅠは $\left(\frac{1}{8}L, \frac{7}{8}R\right)$ であり，プレイヤⅡは $\left(\frac{1}{2}L, \frac{1}{2}R\right)$ と変わらない。ゲームの値は $3\frac{1}{2}$ となる。

$\left(3, -3\frac{1}{2}\right)$ はプレイヤⅠ，Ⅱに対するゲームの minimax 解である。

次に均衡戦略の概念を用いて，このゲームを考察することにする。

プレイヤⅠは，3の利得を保証するには，戦略 $\left(\frac{1}{2}L,\ \frac{1}{2}R\right)$ でプレイすべきであるし，プレイヤⅡは，$-3\frac{1}{2}$ の利得を保証するには，$\left(\frac{1}{2}L, \frac{1}{2}R\right)$ でプレイすべきである。従って，両プレイヤのこの戦略は均衡点さ保証する均衡戦略であり，またミニマックス解とも一致する最適戦略である。この点は Khun の証明に等しく問題は生じない。所で，プレイヤⅠの戦略が，$\left(\frac{1}{2}L,\ \frac{1}{2}R\right)$ でなく，$\left(\frac{1}{8}L,\ \frac{7}{8}R\right)$ となる状況が生じた場合は，事態は変わり，均衡戦略とミニマックス解とは一致しなくなる。このような局面を Aumann と Maschler は次のような展開形のゲームによって説明している。



零和2人ゲームGを考える。最初の手番は偶然手番であり，二つの手LとRの一つを各々確率 $\frac{1}{3}$ と $\frac{2}{3}$ で選択する。もしLが選ばれると，プレイヤⅠは選択を行うことなく，プレイヤⅠの利得はプ

レイヤⅡの選択だけに依存する。プレイヤⅡがLかRかのいづれかを選ぶことにより，プレイヤⅠの利得は9から0になる。Rが選ばれると，プレイヤⅠとⅡは互いに相手の選択を知ることなく，LとRの一方を選ぶ。第2手番はプレイヤⅠであり，第3手番はプレイヤⅡで，プレイヤⅡは偶然手番の選択については何んの情報もなしに選択を行う。勿論プレイヤⅠは偶然手番でRが選ばれたことは知っているのである。利得は次の表に従っている。

この表はそれ自身零和2人ゲームであり，G_Rとする。G_R はGの部分ゲーム (subgame) である。

Ⅰ \ Ⅱ	L	R
L	6	0
R	0	6

元のゲームはGにおいて，プレイヤⅠ，Ⅱは2つの純粋戦略を持っているので，Gの標準形を行列で示せば

G

Ⅰ \ Ⅱ	L	R
L	7	0
R	3	4

となる。[9] このゲームの最適戦略は，プレイヤⅠは$\left(\frac{1}{8}\mathrm{L},\ \frac{7}{8}\mathrm{R}\right)$で，プレイヤⅡは$\left(\frac{1}{2}\mathrm{L},\ \frac{1}{2}\mathrm{R}\right)$であり，ゲームGの値，ミニマックス解は$3\frac{1}{2}$である。

ここで各プレイヤの戦略を考えて見よう。プレイヤⅡの最適戦略は，Gでは$\left(\frac{1}{2}\mathrm{L},\ \frac{1}{2}\mathrm{R}\right)$で，$G_R$においても$\left(\frac{1}{2}\mathrm{L},\ \frac{1}{2}\mathrm{R}\right)$である。即ち，Ⅱは偶然がLを選ぶ可能性を無視し，偶然がRを選んだのが確かであるようにプレイする。ⅡはG_Rではミニマックス戦略を選び，偶然がLを選ぶときには最良の戦略Rを選べばよいが，このときは情報が欠除しているために，この場合は起らない。

次にプレイヤⅠの戦略を考える。偶然がLを選べばⅠは何もしない。偶然がRを選ぶとき，Ⅰに対する利得行列はG_Rでの最適戦略$\left(\frac{1}{2}\mathrm{L},\ \frac{1}{2}\mathrm{R}\right)$であり，利得3が保証出来る。しかるに，プレイヤⅠがGの最適戦略$\left(\frac{1}{8}\mathrm{L},\ \frac{7}{8}\mathrm{R}\right)$を選べば，利得3を保証出来ない戦略を選ぶという奇妙な結果を招くことになる[10]。

この原因は展開形から標準形へと変換した際に，プレイヤⅠが決定をする時点を動かしたからである。展開形のゲームでは，プレイヤーⅠは偶然手番の選択の情報を受け取ったのち決定をするが，標準形ではこの情報を受けとる以前に決定を行わねばならないのである。プレイヤⅠが偶然手番が選択を行う前に戦略を決めなければならない。偶然がLを選ぶ可能性を考えざるを得ないわけで，最適戦略はこの状況を反映している。仮りに偶然がRを選んだという情報が得られたとすれば，偶然がLを選んだかも知れないという事は考える必要がなくなる。しかしこの考えは，われわれの展開形から標準形へのゲームの導き方を無視するもとなるであろう。

Ⅵ．おわりに

ゲームの三つの表現形式は，von Neumann と Morgenstern［1］によって与えられたものであり，それらの特性はすでに述べてきた通りである。［1］以来，各形式の理論展開は独立に進行した。勿論，各形式には固有の問題があり，固有の適用分野を持っているのである。三つの形式の相互関連性は理論上からは，重要な論点であるにもかかわらず，充分な議論がなされていないのは，それなりの理由があるが，この問題の考察は，ゲーム理論の基本的な性格を理解する点で興味ある所である。

この三者の関係は，ゲームにおける決定のあり方における諸問題，特に情報の利用の仕方に係わ

9）ⅠがL，ⅡがLを選択すると $\frac{2}{3}\times 6+\frac{1}{3}\times 9=7$，ⅠがL，ⅡがRを選択すると，0
　ⅠがR，ⅡがLを選択すると $0+\frac{1}{3}\times 9=3$，ⅠがR，ⅡがRを選択すると $\frac{2}{3}\times 6=4$

10）プレヤーⅠの保証値は，$\left(\frac{1}{2}\mathrm{L},\ \frac{1}{2}\mathrm{R}\right)$のとき，$\frac{1}{2}\times 6+\frac{1}{2}\times 0=3$，$\frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{2}\times 6=3$で　3。
　$\left(\frac{1}{8}\mathrm{L},\ \frac{7}{8}\mathrm{R}\right)$のとき，$\frac{1}{8}\times 6+\frac{7}{8}\times 0=\frac{3}{4}$，$\frac{1}{8}\times 0+\frac{7}{8}\times 6=\frac{21}{4}$で$\frac{3}{4}$となる。

りがあるように思われる。このような考察は，更に各分野での発展と共に考察されるべき問題点であろう。

参 考 文 献

〔1〕J. von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of games and Economic Behavier*. Princeton University Press ; 3rd ed., 1953.

〔2〕Kuhn, H. W, "Expensive games and the problem of information," vol. 2, pp.193—216, *Annals of Math. Stadies* No. 28, edited by H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Princeton University Press, 1953.

〔3〕R. J. Aumann and M. Maschler, "Some Thoughts on the Minimax Principle, *Management Science* vol. 18, No. 5, Part 2, 1972, pp. 54—63.

〔4〕W.F. Lucas, "An Overview of the Mathematical Theory of Games," *Management Science* vol. 18, No. 5, Part 2, 1972, pp. 3—19,

〔5〕W.F. Lucas, "Some Recent Developments in n-Person Game Theory," *SIAM Review* vol. 13, No. 4. 1971, pp. 491—523.

〔6〕鈴木光男編著「ゲーム理論の展開」昭和48年　東京図書

〔7〕西田俊夫「ゲームの理論」昭和48年　日科技連

〔8〕G. オーウェン；宮沢光一訳「ゲーム理論」昭和47年　東洋経済新報社