選好の構造

中山慶一郎

Ⅰ. はじめに

選択 (Choice) の問題は人間の行動のすべてに亙る中心問題の一つである。事実，我々が行動するということは選択するということと同義である。選択の論理は，心理学や行動科学の基礎を占める役割を果している。経済学では経済行動というものは現象を経済的に処理する，即ち利潤を極大にするとか，効用の極大化を計るとかが，経済行動の基本をなしているのであって，このような原理に従って最適の選択を行うことが研究されている。消費者選択の理論は経済学の分野でこの問題を扱つかった成果であり，選好 (preference) について，幾つかの公理から一般的な消費理論[1)]をつくりあげたのである。

しかし人間の選択行動はすべてある公理に従って，予測可能になるというわけではない，一般には不確定であり，非合理的であって予測不可能である。選好の構造を考えると，このような場合は自由選好であって非論理的，非決定論的である。我々の研究対象としては，このような局面と共に，より高次な局面での選好を取り扱うものである。すなわち選択について部分的若しくは完全に順序づけられた選好を有する場合であって，この場合には論理的，合理的な選択が可能な選好構造を有する。

選好構造を記述するには，ある集合からとり出された二つの要素間の関係を二項関係 (Binary Relation) を基礎として表わすのが普通である。集合Yについての二項関係は順序集合 $\{(x, y): x, y \varepsilon \mathrm{Y}\}$ である。二項関係を基礎として選好構造を集合論的に説明するのは，必らずしも理解が容易であるとは思えない。それで我々は，グラフ (Graph) 及びブール行列 (Boolean matrix) を用いて選好を記述するならば，直観的に把握し易すく，また選好構造を理解するのが容易である。本稿は，グラフ及びブール行列によって選好構造を解明することを目的とする。

Ⅱ. 二項関係

選好の構造は二項関係に基づくものであるのでここで二項関係の性質を説明する。我々は二項関係を，グラフ[2)]及びブール行列によって記述するので，この両者について簡単にふれておく。

グラフ (graph) G とは，点 (point) と，幾つかの点を結ぶ線 (line) の集まり (set) である。点は頂点とも呼ばれ，線は稜とも呼ばれる。有向グラフ (digraph or directed graph) D は，相異なる2点間の線が，すべて方向づけられたグラフであり，それに対応するブール行列 A は，有向グラフが持つ点と同数の行と列を有し，点 i から点 j えの線があれば $\mathrm{A}_{ij}=1$ で，なければ $\mathrm{A}_{ij}=0$ の要素をもつものである。ブール行列のベキ乗は普通の行列の積を行なうが，ブール代数の法則に従うので，$1+1=1$ である。二つのブール行列AとBの積Cは，$\mathrm{C}_{ij}=\mathrm{A}_{ij}\mathrm{b}_{ij}$ で与えられる。この積は行列の論理積 (logical intersection) といわれる。次に二項関係の諸性質をグラフ及びブール行列で記述する。二項関係Rを集合Sの上に規定する一つの方法は，順序づけられた組 (ordered pairs) (x, y) の集合が，x, y 共にRに属するように，S×S の部分集合 R を規定すること，すなわち $xRy \Longleftrightarrow (x, y) \subset \mathrm{R}$ である。

二項関係のもつ性質を列挙すると[3)]，

(1)反射性 (reflexivity) 。$x \varepsilon \mathrm{S}$ に対し，xRx。すべての組 (n,n) ，すなわち $x=y$ となるすべ

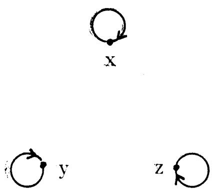
---

(1) この分野における最近の成果を集めたものとして，Chipman and Others ed. "Preferences, Utility, and Demand," Harcourt Brace Jovanovich, Inc. 1971 をあげておく。

(2) グラフについて文献[7]を参照のこと。

(3) 2項関係の性質については，文献[5] p. 10~11 に従っている。

ての組（x, y）を含むとき，反射的であるという

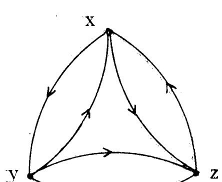


	x	y	z
x	1	0	0
y	0	1	0
z	0	0	1

図2・1　反射性のグラフとブール行列

(2)非反射性（irreflexivity）。$x \varepsilon S$ に対して，$\sim(xRx)$。

(3)対称性（symmetry）。x, $y \varepsilon S$ に対して，$xRy \Rightarrow yRx$。組（x, y）がグラフGに属するならば，組（y, x）もGに属することを意味する。



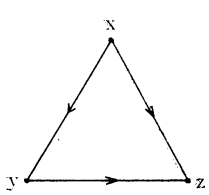
	x	y	z
x	0	1	1
y	1	0	1
z	1	1	0

図2・2　対称性のグラフとブール行列

(4)非対称性（asymmetry）。x, y に対して，$xRy \Rightarrow \sim yRx$。x, yが異なるとき，組（x, y）はグラフGに属すならば（y, x）はグラフGに属さない。

(5)反対称性（antisymmetry）。x, $y \varepsilon S$ に対して$(xRy, yRx) \Rightarrow x=y$。

(6)推移性（transitivity）。x, y, $z \varepsilon S$ に対して，$(xRy, yRz) \Rightarrow (xRz)$。もし二つの組（$x$, y）と（y, z）がグラフGに属するなら，組（x, z）もまたもとのグラフGに属するという性質である。



	x	y	z
x	0	1	1
y	0	0	1
z	0	0	0

図2・3　推移性のグラフとブール行列

(7)負の推移性（negatively transitivity）。x, y, $z \varepsilon S$ に対して，（$\sim xRy, \sim yRz$）$\Rightarrow \sim xRz$。

(8)完備性又は連結性（completeness or connected）。x, $y \varepsilon S$ に対して，xRyかyRxか（xRy, yRx）のいづれかが成立する。

(9)弱連絡性（weakly connected）。x, $y \varepsilon S$ に対して，$x \neq y \Rightarrow (xRy$ or $yRx)$。

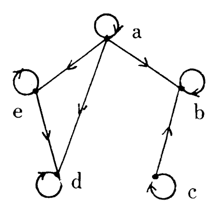
我々は以上の二項関係に基づいて，選択即ち順序づけの基礎となる選好の構造を考察する。

順序づけの基礎となる選好関係として，一般に次の三つの選好が定義される。すなわち，

(1)弱選好（weak preference）。(2)強選好（strict preference）。(3)無差別（indifference）。である。

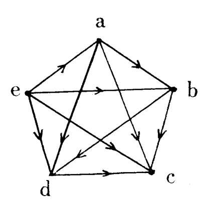
弱選好とは二項関係の諸性質のうち，(1)反射性，(6)推移性，(8)完備性を有する順序関係を意味し，強選好は，(2)非反射性，(4)非対称性，(6)推移性，(8)完備性を有する順序関係であって，無差別とは，(1)反射性，(3)対称性，(6)推移性を有する同値（equivalence）関係を表わす。

これらの選好は，グラフ及びブール行列で様々な形に表現出来る。その一例を示せば，



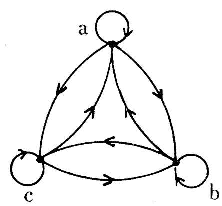
	a	b	c	d	e
a	1	1	0	0	1
b	0	1	0	0	0
c	0	1	1	0	0
d	0	0	0	1	0
e	0	0	0	1	1

図2・4　弱選好のグラフとブール行列



	a	b	c	d	e
a	0	1	1	0	0
b	0	0	1	1	0
c	0	0	0	0	0
d	0	0	1	0	0
e	1	1	1	1	0

図2・5　強選好のグラフとブール行列



	a	b	c
a	1	1	1
b	1	1	1
c	1	1	1

図2・6　同値関係のグラフとブール行列

いま集合の二つの要素 x と y の間の順序関係を示すのに記号≪を用いる。x が y に先行するならば $y \ll x$，x が y に先行するか同位のときは $y \leqq x$ と書く。図2．4の順序関係は $a \ll e \ll d$, $a \ll b$ $c \ll b$，となっており，図2．5は $e \ll a \ll b \ll d \ll c$ となっている。図2．4の場合は，部分的に順序関係になっているだけで全部の要素間の順序関係を表わすことはできない。しかし図2．5は完全順序関係となっている。前者は部分決定的論理選好といい，後者は完全決定的論理選好という。

多数の選好要素から構成される選好構造は，複雑な順序関係をなしているのであり，それをグラフ及びブール行列によって表現すると，甚だ直観的に見通しのよい形となる。我々は選好構造の分析を，ブール行列の収束によって分析することにする。

Ⅲ．グラフとブール行列の収束[4)]

任意に与えられたブール行列のベキ乗の漸近形がブール行列の示すグラフの性質によって決定されることは，周知の事実である。

いま正方ブール行列 $R=\|r_{ij}\|$ $(i, j=1, \cdots, n)$

$$r_{ij}=\begin{cases}1 & if\ a_i\ \rho\ a_j\\ 0 & if\ a_i\ \bar{\rho}\ a_j\end{cases}$$

と定義する。ただし，a_1，……，a_n の n 個の要素の集合についての二項関係を ρ で表わし，a_i と a_j 間の関係 ρ を $(a_i\ \rho\ a_j)$ と表わし，関係 ρ が存在しなければ $(a_i\ \bar{\rho}\ a_j)$ で示す。有向グラフGと $R=\|r_{ij}\|$ とは，1対1の対応関係にあるので，$r_{ij}=1$ ならば，a_i から a_j への方向づけられたグラフが存在し，$r_{ij}=0$ はそのようなグラフが存在しない。したがって，選好の構造を有向グラフで表現するとすれば，その選好の構造は，またブール行列によって置きかえることが出来，その逆もまた成立する。

ブール行列のベキ乗 (powers) はブール代数の加法，乗法を行列要素にほどこして得られる行列積 $R^2=R \cdot R$, $R^3=R \cdot R \cdot R$ ……として定義される。次にブール行列の収束と振動を定義しよう。

定義1：ブール行列Rは，$R^m=R^{m+1}$ となるRのベキ乗 R^m の系列 $\{R_k ; K=1, 2, \cdots\}$ が存在するならば，収束 (convergent) するという。

定義2：ブール行列Rは，$p>1$ なる最小の整数 p に対して，$R^m=R^{m+p}$ となるRのベキ乗 R^m の系列 $\{R^k ; K=1, 2, \cdots\}$ が存在するならば，振動 (oscillatory) する，又は周期 (periodic) 的であるという。

上の定義に従えば，ブール行列は収束するか振動するかのいずれかであることが分かる。収束するブール行列は，(ⅰ)零行列 N_n [5)] (null matrix)；(ii)普遍行列 V_n [6)] (universal matrix)；(iii)ベキ等行列 R^* [7)] $N_n<R^*<V_n$ (some idempotent matrix)。のいづれかに収束する。

次にブール行列の収束と，グラフとの関連を考察することにする。まず，グラフについて幾つかの定義を導入しよう。

定義3：グラフGの点 a, b が $\overrightarrow{a, r_1}$, $\overrightarrow{r_1 r_2}$, …, $\overrightarrow{r_{m-1}, b}$ なるグラフを含むならば，連結 (connected) であるという。

定義4：グラフGがm個の点を含み，各点が，Gの各点と連結しているならば，Gはm次 (order m) のサイクルネット又は巡回網 (cyclic net) という。

定義5：グラフGのどの真部分グラフHもサイクルネットでなければ，グラフGにおけるサイクルネットは単純 (simple) であるという。

定義6：グラフGにおける次数mのサイクルネットHは，Gにおけるすべてのサイクルネットが Hの部分グラフであり，Hと共通点を含まないならば，HはGにおいて最大 (maximal) であるという。

定義7：グラフGにおいて次数mのサイクルネットHは，ある正整数 q に対して，Hの各点がHのある点 a から q ステップで到達出来るならば普遍 (universal) であるという。

定義8：次数1のサイクルネットKは，明らかに単純で普遍である。これをループ (loop) という。

---

(4)　この節の定義，定理は文献[1]による。
(5)　N_1 とは行列の要素がすべて0となる行列である。
(6)　V_1 とは行列の要素がすべて1となる行列である。
(7)　R_1^* は行列の要素に0と1が共に含まれる行列である。

ここでグラフとブール行列の収束と関連づけるRosenblattの定理を証明なしに述べる。

定理１：Rは次数n（n≧2）のブール行列でそのグラフをG(R)とすると，次の関連が成立する

(a)　G(R)がサイクルネットを全然含まなければRはN_nに収束する。

(b)　R(R)が普遍サイクルネットであれば，RはV_nに収束する。

(c)　G(R)が普遍でない少くとも一つの最大サイクルネットを含むならば，Rは振動する。

(d)　G(R)がサイクルネットでないが，少くとも一つの普遍サイクルネットを含み，G(R)のすべて最大サイクルネットが普遍であれば，Rはベキ等行列R^*，$N_n < R^* < V_n$に収束する。

定理２：グラフGにおいて次数m≧2のサイクルネットHは，Hにおけるすべての単純サイクルネットの次数の最大公約数が１であるときのみ，普遍である。

定理２の系として

系１：次数nのブール行列RのグラフG(R)が，一つ或いはそれ以上のサイクルネットを含めば，G(R)の最大サイクルネットに対応するRのすべての部分行列はRのベキ乗を振動せしめるか，普遍に収束するかいづれかである。

定理１と定理２によって，我々はグラフ論的観点から有限次元のブール行列の漸近形を完全に規定することが出来る。グラフの性質とブール行列の収束との関連づけられたところで，再び選好の構造の問題との関係に戻どり，選好の構造が，ブール行列の収束との関連でどのように特徴づけられるか次節で考察することにする。

Ⅳ．選好構造とブール行列の漸近形

ブール行列の収束形から一般的な選好構造の解明に至るまで，我々の研究は進んでいないので，幾つかの実例によって選好構造を明らかにしたい。Koo［２］は選好構造の主たる型を，(1)強単純順序（strict simple order）。これは非サイクル的（acyclic），推移的（transtive），連結（connected）である場合と，(2)非サイクル的関係(acyclic relation）及び，(3)サイクル（cycles）に分類しているが，ここではブール行列の収束形から幾つかの選好構造に分類することにする。[8)]

(a)零行列N_nに収束する場合。

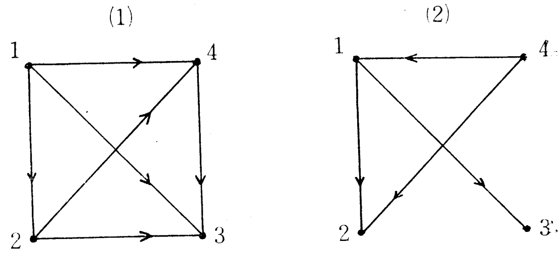


図４・１　N_nに収束する有向グラフ（n＝４）

いま零行列に収束する４点を有する有向グラフは図４．１の如く完全順序をもつグラフであって選好構造は完全決定的論理選好となる。(1)の場合は一意的なグラフ解が求まるが，(2)の場合，点２と３はグラフの解集合を形成する。したがって２と３の選択は無差別である。この場合は部分的論理選好をもつことになる。N_nに収束する(a)においては点の数を任意の大きさに拡大して一般化しても同様の結論が得られる。

完全に順序を有する選好は非サイクル的グラフを有する，従ってサイクルネットを含まない，二項関係からいえば，irreflexive, transitive asymmetric, weakly connected な関係が存在する選好構造を有する。

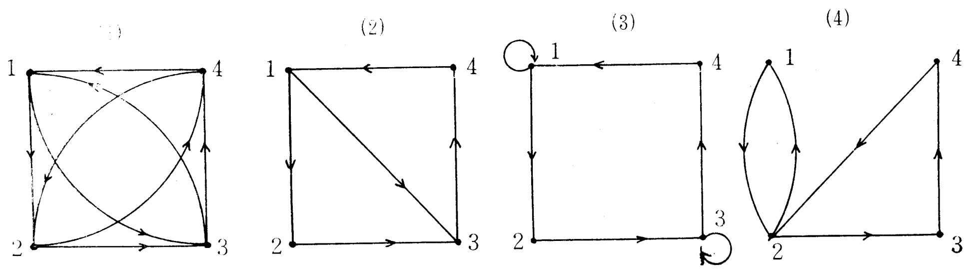


図４・２　V_nに収束する有向グラフ（n＝４）

(8)　ブール行列の収束についてのプログラムの作成には関西学院大学計算センターの雄山氏の協力を得た。

(b)普遍行列 V_n に収束する場合。

V_n に収束する有向グラフ（n＝4）の例は図4．2）で与えられている。V_n に収束する有向グラフは，定理1によって普遍サイクルネットを有する。図4．2において，(1)，(2)，(3)は次数4のサイクルネットを有し，更に(1)においては次数3の単純サイクルネットを4つ含んでいる両者の最大公約数が1であるから定理2によって，グラフは普遍である。(2)の場合は次数3の単純サイクルネットが1つ含んでいる場合であり，(3)では次数1の単純サイクルネット即ちループを2つ含んでいるので，定理2によって，いずれもグラフは普遍サイクルネットである。(4)は次数3と2のサイクルが結合したものであるが，次数(2)のサイクルを1つのループと見なせば次数3のサイクルにループが1つ含まれるものと考えれば定理2が適用可能である。

ブール行列が V_n に収束すれば，有向グラフは自由選好グラフとなり，自由選好となる構造を持つ。すなわち，AよりBを好み，BよりCを好めば，AよりCを好む推移性は成立するが，CよりDを好むとすれば，DよりAを好む選好が存在して，部分的には論理選好を有しても全体としては比較不能な選好構造を有する。

二項関係からみると irreflexive asymmetric, weak connected な二項関係をもつサイクルに，transitvity と reflexivity が加わった選好構造をもつ。

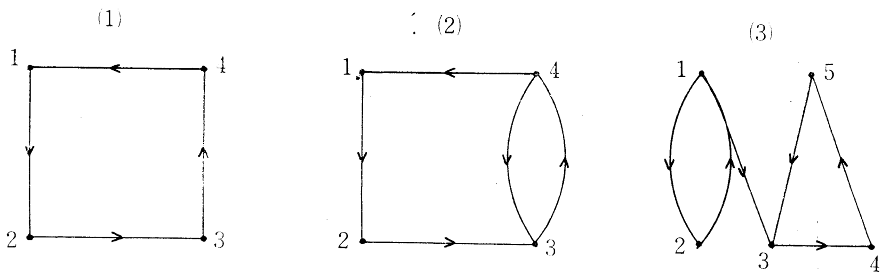


図4・3　振動する有向グラフ(n=4,5)

(c)振動する場合

(1)は普遍でない唯一の最大サイクル（n＝4）を持つ場合で，周期4で出発点に戻るサイクルを有する。(2)は次数4の最大サイクルネットに点3と4の部分グラフを有する場合で，点3と点4を同値と見なして1点で縮約するならば，次数3の(1)の場合となる。(3)は次数3と次数2のサイクルが結合しているが，路通（path）$\overrightarrow{1,\ 3}$は一度通過するだけであるので，独立した最大サイクルネットを二つ有する場合に解釈出来るであろう。

振動するブール行列をもつ選好構造は自由選好を有する非論理的なもので，部分的論理選好を持たない，irreflexive, connected な選好構造を有するものと思われる。

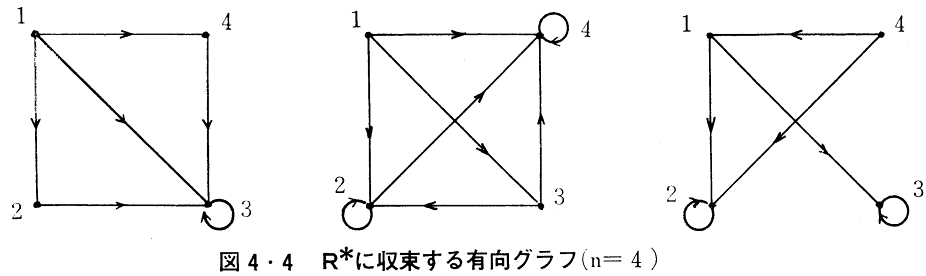


図4・4　R^*に収束する有向グラフ(n= 4)

(d)ベキ等行列 R^* に収束する場合。

定理1によれば，R^*に収束するグラフはサイクルネットではないが，少くとも1つ以上の普遍サイクルネッとを含む。この三つの例では，グラフはいずれも完全順序又は部分順序を持ち，それにループが加わった形になっている。従って R^* に

収束する選好は合理的論理選好に，reflexiveな関係が加わったものと見なすことが出来よう。すなわち(1)の収束形は

	1	2	3	4
1	0	0	1	0
2	0	0	1	0
3	0	0	1	0
4	0	0	1	0

であって，各点は第3点に収束することが意味されている。また(2)の収束形は

	1	2	3	4
1	0	1	0	1
2	0	1	0	1
3	0	1	0	1
4	0	0	0	1

となり，第4点が4のみに収束することを除けば各点は第2，第4点に収束する。(3)の収束形は

	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	0	1	0	0
3	0	0	1	0
4	0	1	1	0

であるから，収束点は第2，第3点となることが明白である。

R^*の収束形は行列の要素に0，1の点を含むが，その形から選好の形が如何なるものであるか判断することが出来る。

以上の分析からブール行列の収束形による選好構造の分析は極めて有用であるように判断される。ここで取りあげた収束例は少数であるので一般的結論にまでは到達していないが，それは可能であろう。

V．おわりに

選好の構造は人間の様々な行動を説明している。自由選好から完全決定的論理選好に至るまでは，全く自由な社会システムから完全に決定づけられた社会システムを表現している。現実はその中間の部分的決定的論理選好をもつシステムである。問題はどのような状況の下でどの様な選好構造が存在するかということであり，その為の実験的研究が必要とされるであろう。

参 考 文 献

［1］ David Rosenblatt, On the Graphs and Asymptotic Forms of Finite Boolean Relation Matrices and Stochastic Matrices, *Naval Research Logistics Quarterly* vol 4, No. 2, 1957.

［2］ Anthony Y. C. Koo, Revealed Preference—A Structural Analysis, *Econometrica*, vol. 39, No. 1, 1971.

［3］ A. Kaufmann (藤井章男訳)，意思決定の科学，講談社ブルーブックス，1971.

［4］ Marimont, R. B, Applications of Graphs and Boolean Matrices to Computer Programming, *SIAM Review*. 2, 1960.

［5］ Peter C. Fishburn, *Utility Theory for Decision Making*, Wiley, 1970.

［6］ Amartya K. Sen, *Collective Choice and Social Welfare*, Holden-Day, 1970.

［7］ Frank Harary (池田貞雄訳)，グラフ理論，共立出版，1971.

［8］ Alfred Tarski, *Introduction to Logic*, Oxford Univ. Press, 1946.