

## 論文

## 運動筋中の乳酸蓄積の非線形モデル

北田韶彦\*<sup>1</sup>, 甲斐知彦\*<sup>2</sup>, 河鱒一彦\*<sup>2</sup>早稲田大学数学応用数理教室\*<sup>1</sup>, 関西学院大学人間福祉学部人間科学科\*<sup>2</sup>

## ● 要約 ●

近似関数による計算値と得られた実際のデータとの間の誤差評価を通して運動筋中の乳酸の蓄積の動態は線形微分方程式によってではなく、非線形（2次）微分方程式によって記述されるべきであることが確かめられた。そのため強い負荷の下での運動中にはカオスの様相を呈する乳酸の蓄積が観察される可能性がある。

● Key words : 乳酸蓄積, 非線形モデル, 二乗平均誤差, カオス, 非線形微分方程式

人間福祉学研究, 1 (1) : 17-21, 2008

## 1. はじめに

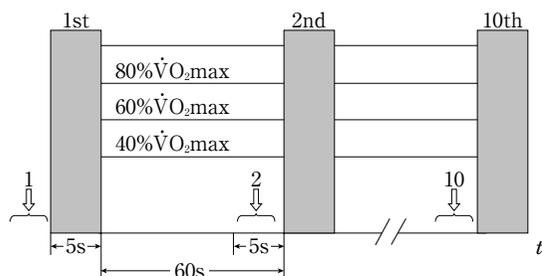
アスリートの競技能力を筋へのエネルギー供給機構の能力ととらえた場合、測定の種類は、有酸素性エネルギー供給機構を評価する測定と無酸素性エネルギー供給機構を評価する測定にわけられる。前者の代表例が最大酸素摂取量の測定である。後者に関しては、垂直跳び、階段上がりテスト、機械的出力パワー等と多くの研究報告がみられる。いずれの無酸素性エネルギー供給機構の測定も運動負荷を独立変数とし、時間変化に伴う力発揮の測定である。有酸素・無酸素性エネルギー供給系の測定法は、いずれもが単一パラメーターの測定である。

しかしながら、実際の競技場面では、単一パラメーターの測定と同じ様式の動作はきわめて少なく、このような測定が必ずしもアスリートの競技能力を反映しているとはいえない。そこで、日本体育協会スポーツ科学委員会では、競技場をモデル化した有酸素運動と無酸素運動の相互作用に

関する研究<sup>1)</sup>を行っている。これらの研究では、無酸素性エネルギー供給機構を評価する激運動と、有酸素性エネルギー供給機構を評価するそれ以下の運動の強度を組み合わせるくり返し行う、くり返し激運動を用い、この運動中の筋パワー、血中乳酸値、酸素摂取量などの動態が報告されている。しかしながら、これらの報告では、くり返し激運動中の筋パワー、血中乳酸値、酸素摂取量などの動態を現象論的に記述するにとどまっておき、微分方程式等によるモデル化に至っていないのが現状である。そこで、本報においてはくり返し激運動中の血中乳酸値の動態に着目し、蓄積の様相を常微分方程式を用いて評価し、その解の振る舞いについての数学的検討を試みた。

## 2. 方法

本報で取り扱った動態は、図1に示す実験から得られた河鱒ら<sup>2)</sup>のデータを用いた。具体的には、自転車エルゴメーター（竹井機器社製ハイパワー



▨ Pedaling of maximum effort  
 ↓ Blood sample

図1 experimental protocol

エルゴメーター)を用いて、以下の手順で行った。被験者は、足部がペダルの回転径の最下点に達したとき、関節がやや屈曲する程度に調整されたサドルに乗り、足部を toe-strap で固定された。さらに、任意に利き足を選択させて、利き足側のペダルを前上方 45° に固定し、これを激運動 (全力ペダリング) の開始点とした。被験者は、5秒間の激運動と、その後の 60 秒間の緩運動を行う組み合わせを 9 回行い、10 回目の全力ペダリングで作業を終了した。採血は、安静時および各緩運動の最後の 5 秒に行い、合計 10 回のサンプリングとなった。また、激運動の負荷は、0.093 Nm/kg.B.W とし、緩運動期の負荷は、40%  $\dot{V}O_2$  max, 60%  $\dot{V}O_2$  max, 80%  $\dot{V}O_2$  max, の 3 種類を設けた。% $\dot{V}O_2$  max については、あらかじめ、最大酸素摂取量を測定し、測定中の負荷と  $\dot{V}O_2$  の関係式から求めた。血中乳酸値の測定には、東洋紡社製ラクテートアナライザーを用いた。なお、被験者には、週 6 日以上トレーニングを行っている体育専攻学生 11 人を用い、その平均値をもとに分析を行った。

### 3. 結果および考察

図 2 は、測定で得られた結果である。横軸は時間経過を、縦軸は血中乳酸値を示している。本報では、この動態に対して常微分方程式を用いて評

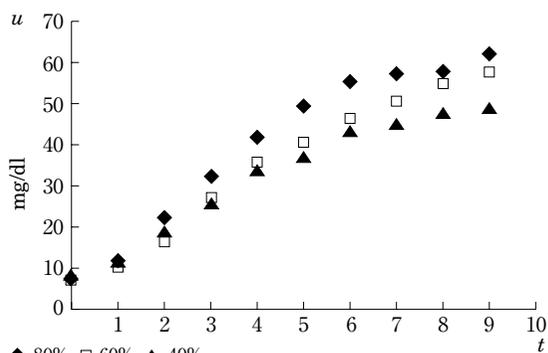


図2 variation mode of blood lactate

価を行った。すなわち、以下に示すモデルにより、関数近似を行い、 $\epsilon_{RMS}$  (二乗平均誤差) の観点から、記述モデルの決定およびその評価を行った。(線形モデル)

現在の乳酸値を  $u$ , 上限値を  $k$  とすると、動態は「 $u$  の  $t$  に対する変化率は  $k$  と現在の値  $u$  との差に比例する」という仮定から得られるところの

$$\frac{du}{dt} = c(k - u) \quad c > 0, t > 0, k > 0 \quad \dots (1)$$

$$u(0) = u_0$$

の解、

$$u(t) = (u_0 - k)e^{-ct} + k \quad \dots (1-1)$$

で表現される。

関数近似の方法としては、(1-1) の具体的な形を求めるためには、 $u_0$ ,  $k$ ,  $c$  の決定が十分であることから、以下のようにした。

(1) について、 $y = du/dt$ ,  $a_0 = ck$ ,  $a_1 = -c$  とおけば、(1) は  $y = a_0 + a_1 u$  となる。ここで、各  $t$  ( $t = 1, \dots, N-1$ ) における  $y_t$  を差分公式

$$y_t = (\tilde{u}_{t+1} - \tilde{u}_{t-1}) / 2 \quad (\tilde{u}_t \text{ は実際のデータ})$$

で求めれば、最小二乗法により、 $a_0$ ,  $a_1$  が求まり、 $k$ ,  $c$  が求められる。

また、この  $k$ ,  $c$  を用いて、

$$u_0 = \frac{k \sum_{t=0}^N e^{-2ct} - k \sum_{t=0}^N e^{-ct} + \sum_{t=0}^N \tilde{u}_t e^{-ct}}{\sum_{t=0}^N e^{-2ct}}$$

表1 comparison between linear model and non-linear model

load of sub maximum interval exercise	40% $\dot{V}O_{2max}$	60% $\dot{V}O_{2max}$	80% $\dot{V}O_{2max}$
$\alpha/\beta$	1.98	1.49	1.78

$\alpha$ :  $\epsilon_{RMS}$  of linear model     $\beta$ :  $\epsilon_{RMS}$  of non-linear model

が求められる。こうして、 $u(t)$ の具体的な形が得られる。

また、近似関数による計算値と、得られた実際のデータとの間の誤差評価は以下によった。

$\epsilon$  RMS for linear model

$$= \sqrt{\frac{1}{N+1} \sum_{t=0}^N |(eq. (1-1))_t \text{ with the calculated } u_0, k \text{ and } c) - \text{actual data } u_t|^2}$$

(非線形モデル)

現在の乳酸値を  $u$ , 上限値を  $k$  とすると、動態は、「 $u$  の  $t$  に対する変化率は  $k$  と現在の値  $u$  との差と現在の値  $u$  との積に比例する」という仮定から得られるところの

$$\begin{aligned} du/dt &= cu(k-u) \quad c>0, t>0, k>0 \dots (2) \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

の解

$$u(t) = \frac{k}{1 + (k/u_0 - 1)e^{-ckt}} \dots (2-1)$$

で表現される。

関数近似の方法としては、(2-1)の具体的な形を求めるためには、 $u_0, k, c$  の決定が十分であることから、以下のようにする。

(2)の両辺を  $u (\neq 0)$  で割れば、

$$\frac{1}{u} \frac{du}{dt} = c(k-u) \dots (3)$$

を得る。(3)について、

$$y = \frac{1}{u} \frac{du}{dt}, \quad a_0 = ck, \quad a_1 = -c \text{ とおけば,}$$

(3)は  $y = a_0 + a_1 u$  となる。ここで、各  $t (t=1, \dots, N-1)$  における  $y_t$  を差分公式

$$y_t = \frac{(\tilde{u}_{t+1} - \tilde{u}_{t-1})}{2u_t} \quad (\tilde{u}_t \text{ は実際のデータ})$$

で求めれば、最小二乗法により、 $a_0, a_1$  が求まり、 $k, c$  が求められる。

また、この  $k, c$  を用いて、

$$u_0 = \frac{\sum_{t=0}^N e^{-2ckt}}{\sum_{t=0}^N \frac{e^{-ckt}}{\tilde{u}_t} + \sum_{t=0}^N \frac{e^{-2ckt} - e^{-ckt}}{k}}$$

が求められる。こうして、 $u(t)$ の具体的な形が得られる。

また、近似関数による計算値と得られた実際のデータとの間の誤差評価は以下によった。

$\epsilon$  RMS for nonlinear model

$$= \sqrt{\frac{1}{N+1} \sum_{t=0}^N |(eq. (2-1))_t \text{ with the calculated } u_0, k \text{ and } c) - \text{actual data } u_t|^2}$$

上記の方法に基づいて近似した結果、得られた  $\epsilon_{RMS}$  の両モデルによる比は表1のとおりとなった。すなわち、いずれの負荷においても、非線形モデルの方が精度が高く、本報における血中乳酸値の蓄積の動態は非線形モデルで表現されるべきであることが分かる。

以下において、上限値  $k$  への  $u(t)$  の収束速度と負荷との関係について検討する。そのために以下の Lemma (補助定理) を用意する。

[Lemma]<sup>3)</sup>

$$\begin{aligned} f &\in C^1(R^1), \exists S \in R^1 \text{ s.t. } f(S) = 0, f'(S) < 0 \\ &\Rightarrow \text{a nontrivial global solution } q(t), t > 0 \\ &\text{of } \frac{dq}{dt} = f(q) \text{ s.t. } e^{At} |q(t) - s| < \infty \\ &\text{for } 0 < A < |f'(S)| \end{aligned}$$

Here, the notation  $f'$  denotes the derivative of the function  $f$ .

この Lemma を(2)に適用すれば  $f'(k) = -ck$  であるから  $k$  への収束速度は  $ck$  によっていることが分かる。表2に  $ck$  の値の負荷依存性を示す。負荷が大きいつき、上限値への収束がすみやかである。

ここまではモデルを微分方程式によって記述して来たが、いまこれを差分化して離散力学系とし

表2 value of  $ck$  in each load

load of sub maximum interval exercise	$40\% \dot{V}O_{2max}$	$60\% \dot{V}O_{2max}$	$80\% \dot{V}O_{2max}$
$ck$	0.60	0.61	0.75

でのモデル化を試みる。すなわち、

$$\frac{du}{dt} = cu(k - u), \quad p = \frac{u}{k},$$

$$\frac{dp}{dt} = ckp(1 - p),$$

$$\frac{(p_{n+1} - p_n)}{\Delta t} = ckp_n(1 - p_n),$$

$$q_{n+1} = F(q_n) \quad \text{where } q = (\Delta t ck)p/1 + \Delta t ck,$$

$$F(q) = (1 + \Delta t ck)q(1 - q).$$

したがって、強い負荷のもと、 $ck$  の値が大きくなると2次力学系  $F$  はカオス軌道を形成することが分かる<sup>4~8)</sup>。

#### 4. 結 論

運動筋中の血中乳酸値の蓄積の動態は、線形モデルではなく、非線形モデルで近似されるべきであることが、 $\epsilon_{RMS}$  (二乗平均誤差) の観点から明らかになった。すなわち、運動筋中の単位時間あたりの乳酸蓄積率は「上限値と現在の乳酸値の差

に比例するのではなく、上限値と現在の乳酸値の差と現在の乳酸値の積に比例する」といえる。

また、上限値への収束速度に関して、緩運動期の負荷が高いほど、収束速度が速いことが明らかになった。さらに、本報で扱った動態が非線形モデルで表現されるため、生体内にカオスが起りうる可能性が数学的に示唆された。

#### 引用文献

- 1) 石井喜八・伊坂忠夫・高橋勝美 (1986) 「無酸素パワーへの接近」『昭和61年度日本体育協会スポーツ科学研究報告』19-26.
- 2) 河鱈一彦・甲斐知彦・望月伸三郎 (1993) 「くり返し激運動中の血中乳酸値の動態評価」『大阪薬科大学教養論叢・ばいであ』17, 65-75.
- 3) 北田韶彦 (2003) 『応用数学』八千代出版.
- 4) 北田韶彦 (2007) 『位相空間とその応用』朝倉書店.
- 5) Kitada, A.; Ogasawara, Y. & Yamamoto, T. (2007) On a dendrite generated by a zero-dimensional weak self-similar set. *Chaos, Solitons & Fractals*, 34, 1732-1735.
- 6) Kitada, A.; Ogasawara, Y. (2005) On a decomposition space of a weak self-similar set. *Chaos, Solitons & Fractals*, 24, 785-787.
- 7) 小笠原義仁・ほか (2006) テント写像の一般化, 日本数学会秋季総合分科会 (大阪市立大学).
- 8) Devaney, R. (2003) *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Westview Press, 38.

## A Nonlinear Model for Lactate Accumulation in an Exercising Muscle

Akihiko Kitada<sup>\*1</sup>, Tomohiko Kai<sup>\*2</sup>, Kazuhiko Kawabata<sup>\*2</sup>

<sup>\*1</sup> Department of Pure and Applied Mathematics, Waseda University

<sup>\*2</sup> Department of Holistic Human Sciences, School of Human Welfare Studies,  
Kwansei Gakuin University

Through an evaluation of the error between the actual observed data and the calculated value based on the approximation function, it was confirmed that the lactate accumulation mode in an exercising muscle must not be described by a linear differential equation but must be described by a nonlinear (quadratic) differential equation. Consequently, it is possible to observe the chaotic mode in lactate accumulation during intense exercise.

---

**Key words** : lactate accumulation, nonlinear model, root mean square error, chaos, nonlinear differential equation