

関西学院大学 研究成果報告

2021年 3月 16日

関西学院大学 学長殿

所属：理工学研究科
職名：博士研究員
氏名：竹井 優美子

以下のとおり、報告いたします。

研究制度	<input type="checkbox"/> 特別研究期間 <input type="checkbox"/> 自由研究期間 <input type="checkbox"/> 大学共同研究 <input type="checkbox"/> 個人特別研究費 <input checked="" type="checkbox"/> 博士研究員 ※国際共同研究交通費補助については別様式にて作成してください。
研究課題	2次元退化 Garnier 系から得られる超幾何微分方程式系における位相的漸化式を用いた WKB 解析
研究実施場所	理工学研究科
研究期間	2020年 4月 1日 ~ 2021年 3月 31日 (12ヶ月)

◆ 研究成果概要 (2,500字程度)

上記研究課題に即して実施したことを具体的に記述してください。

量子力学における WKB 法では WKB 解と呼ばれる Schrodinger 方程式の Planck 定数に関する摂動解が用いられる。WKB 解は一般には発散級数であるため、Borel 総和法により発散級数に解析的な意味付けを与えて解析する手法が完全 WKB 解析である。完全 WKB 解析は、微分方程式の解の大域挙動を解析するのに威力を発揮し、その中でも特に Voros 係数はモノドロミー群や Stokes 現象を記述するために用いられる完全 WKB 解析において非常に重要な量である。

一方、Eynard と Orantin によって導入された位相的漸化式は閉 Riemann 面上の有理型微分を帰納的に定めるもので、種々の幾何学的不変量の導出等に用いられてきた。また、位相的漸化式を用いることにより自由エネルギーと呼ばれるシンプレクティック不変量も得られることが知られている。さらに、Bouchard と Eynard は Planck 定数を含んだあるタイプの線形常微分方程式の WKB 解もまた、位相的漸化式を用いて構成できることを示している。

これらの背景を踏まえ、私は完全 WKB 解析における Voros 係数と位相的漸化式における自由エネルギーの間に成り立つ関係式について考察している。岩木耕平氏と小池達也氏との共同研究によりこれまでに Gauss の超幾何微分方程式とその合流操作から得られる方程式の一族（まとめて Gauss の超幾何微分方程式の一族と呼ぶ。）に対して、一つの自由エネルギーを用いて複数の Voros 係数が書き表されることを示している。これにより、Voros 係数の持つ

差分構造が明確になり、位相的漸化式の自由エネルギーが Voros 係数を支配するより基本的な量であることが判明した。また、2階の微分方程式に対象を限定することにより、Bouchard と Eynardの論文で課されていた“admissibility”と呼ばれる仮定を満たさない場合にも量子化を与えることに成功した。これらの結果を踏まえ、「微分方程式の大域解析における自由エネルギーの役割をさらに明確にすること」を研究目的とし、2変数超幾何系の第1変数への制限である3階常微分方程式を考察した。特に上記の研究期間中は、2変数超幾何系の一つである(1, 2, 2)-超幾何微分方程式系と(1, 1, 1, 2)-超幾何微分方程式系をそれぞれ第1変数へ制限して得られる3階常微分方程式を考察した。それらを以下では(1, 2, 2)-超幾何微分方程式と(1, 1, 1, 2)-超幾何微分方程式と呼び、得られた結果を述べる。

(1, 2, 2)-超幾何微分方程式についてはその古典極限として定まるスペクトル曲線に対して、自由エネルギー F_0 を求めた。また、昇降演算子を計算し、Voros 係数の満たす差分方程式を導出した。さらに、Voros 係数と自由エネルギーの間に成り立つ関係式の導出も行った。この関係式により、(1, 2, 2)-超幾何微分方程式についても Voros 係数の持つ差分構造が明確になり、位相的漸化式の自由エネルギーが Voros 係数を支配するより基本的な量であることが判明した。

(1, 1, 1, 2)-超幾何微分方程式についてもその古典極限として定まるスペクトル曲線に対して、自由エネルギー F_0 を求めた。また、量子化するために必要な条件を具体的に書き下した。この量子化するために必要な条件については、仮定“admissibility”を満たさない(1, 1, 1, 1, 1)-超幾何微分方程式に関しても書き下しており、これらの条件が満たされることの証明は今後の研究課題である。また、本研究で得られたこれらの条件を参考にしつつ、仮定“admissibility”を満たさない3階の常微分方程式に対して量子化を行うことも今後の研究課題である。

これらの手法を差分方程式に対して適用するために、差分方程式に対する WKB 解析についても考察した。これについては、Gauss の超幾何微分方程式の一族に対して、以下の結果を得た。昇降演算子を用いることにより、Gauss の超幾何微分方程式の一族の解と WKB 解が満たす差分方程式を求めた。また、得られた式から Voros 係数が満たす差分方程式を導出した。今後の研究では微分方程式に加え、ここで得られた差分方程式と斉次性から得られる微分方程式を併せた微分方程式系を考察し、差分方程式に対する Stokes 曲線の研究も行う予定である。このように本研究から今後の研究につながる研究題材を得ることもできた。

上記の結果については現在論文作成中である。期間中に発表した以下の論文は、(1, 4)-超幾何微分方程式と(2, 3)-超幾何微分方程式(2変数超幾何系の一つである(1, 4)-超幾何微分方程式系と(2, 3)-超幾何微分方程式系をそれぞれ第1変数へ制限して得られる3階常微分方程式)に対して、Voros 係数と自由エネルギーの間に成り立つ関係式の導出と、Voros 係数と自由エネルギーのそれぞれの具体形の導出について述べている。以下が上記期間に発表した論文である。

1. Y.-M. Takei, Voros Coefficients and the Topological Recursion for a Class of the Hypergeometric Differential Equations associated with the Degeneration of the 2-dimensional Garnier System, arXiv: 2005.08957, submitted.

また、以下の研究集会で研究成果を報告した。

1. Y.-M. Takei, Voros coefficients and the topological recursion for the hypergeometric differential equations associated with the 2-dimensional Garnier system, Formal and Analytic Solutions of Diff. Equations on the Internet (FASnet20), virtual conference, June 29th to 30th, 2020.
2. Y.-M. Takei, WKB analysis via topological recursion for hypergeometric differential equations, スペクトル・散乱理論とその周辺, zoomオンライン開催, 2020年12月2日-4日.
3. Y.-M. Takei, WKB analysis via topological recursion for hypergeometric differential equations, Himeji Conference on Partial Differential Equations, zoomオンライン開催, 2021年3月4日-5日.

以上

提出期限：研究期間終了後2ヶ月以内

※個人特別研究費：研究費支給年度終了後2ヶ月以内 博士研究員：期間終了まで

提出先：研究推進社会連携機構 (NUC)

※特別研究期間、自由研究期間の報告は所属長、博士研究員は研究科委員長を経て提出してください。

◆研究成果概要は、大学ホームページにて公開します。研究遂行上大学ホームページでの公開に支障がある場合は研究推進社会連携機構までご連絡ください。