関西学院大学大学院理工学研究科

2026 年度入学試験

（一次：2025 年 8 月 1 日実施）

専門科目

数理科学専攻

（11:10-13:10　120 分）

【試験にあたっての注意】

1. 筆記用具以外はカバンに入れ、カバンは床の上に置くこと。
2. 携帯電話、スマートフォン、ウェアラブル端末、音楽プレーヤー等の音の出る機器の電源を切ること。なお、アラームを設定している人は解除してから電源を切り、カバンにしまうこと。
3. 時計のアラームは解除すること。携帯電話を時計として使用することは認めない。
4. 試験の途中退出は認めない。ただし、やむを得ない場合は挙手し監督者に知らせること。
5. 不審な言動は慎むこと。不正行為が発覚した場合、全科目を 0 点とする。
6. 試験用紙は以下の構成となっている。
   ①　問題冊子 1 冊
   ②　選択問題調査書、解答用紙
7. 指示があるまで問題冊子および解答用紙を開かないこと。
8. 解答用紙のホチキスは、はずさないこと（提出時もホチキス留めのまま提出すること）。
9. 各問題は、所定の解答用紙に解答すること。
10. 解答にあたっては、問題冊子および解答用紙に書かれた注意に従うこと。
11. 解答用紙には、氏名は記入せず、受験番号のみを記入すること。
12. 原則、解答用紙の裏面使用は不可。やむを得ず解答欄が不足する場合は＜裏面に続く＞と記載することで、裏面への記載を認める。
13. 試験終了後、問題冊子は各自持ち帰ること。

以上

［数理科学専攻（専門科目)］解答にあたって

必須問題２題、選択問題１題の合計３題（１題１００点）を解答すること。
必須問題は、線形代数１題、微積分１題である。
選択問題は、代数（群論・可換環論)、幾何（曲線論・曲面論)、解析（微分方程式・複素関数論)、確率・統計の４題から１題を選択すること。
ただし、選択問題は、指導を希望する教員から指示された分野の問題でなければならない。
解答用紙は１問につき１枚使用すること。

[数理科学専攻　（専門科目）]

〔1〕　（必須問題）次の問いに答えよ．

（1）行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ に対して，線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と定義する．

(i) 行列 A の固有値・固有ベクトルを求めよ．

(ii) 行列 A の固有ベクトルからなる $\mathbb{R}^3$ の基底（基）を 1 つ構成し，その基底（基）に関する f の表現行列を求めよ．

（2）a は定数とする．行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 3 & -9 & a-7 \\ -2 & 6 & a+3 \end{pmatrix}$ に対して，線形写像 $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $g(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}$ と定義する．

(i) 行列 B の階数（ランク）$\operatorname{rank} B$ を求めよ．

(ii) g の核 $\operatorname{Ker} g = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid g(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}\}$ の基底（基）を求めよ．

〔2〕　（必須問題）次の問いに答えよ．

（1）閉領域 $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ y \leq x,\ y \geq 0 \right\}$ および関数

$f(x, y) = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2} + \dfrac{y}{x^2}$ について，2 重積分 $\displaystyle\iint_D f(x, y)\, dxdy$ の値を求めよ．

（2）次の関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1,2,\ldots}$ が区間 $[0, \infty)$ 上で各点収束しているかを調べよ．各点収束している場合には極限関数を求め，さらに，関数列が極限関数に区間 $[0, \infty)$ 上で一様収束しているかを調べよ．

(i) $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{1 + nx}$

(ii) $f_n(x) = \dfrac{nx}{2 + n^3 x^2}$

〔3〕 (代数)　行列の積に関する群 $G = \{E, P, Q, R, S, T\}$ について以下の問に答えよ．ただし，

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である．

(１) G がアーベル群であるかどうか判定せよ．

(２) G の部分群をすべて求めよ．ただし，それら以外に部分群が存在しない理由がはっきり分かるように書くこと．

(３) （２）で求めた G の部分群について，正規部分群であるかどうか判定せよ．

(４) （３）で求めた G の正規部分群のうち，非自明な正規部分群を H とおく．剰余群 G/H の元をすべてあげよ．また，G/H が巡回群かどうか判定せよ．

〔4〕 （幾何）次の問いに答えよ．

パラメータ表示された曲面 $\boldsymbol{p} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を

$$\boldsymbol{p}(u, v) = \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ u + v \end{pmatrix} \quad ((u, v) \in \mathbb{R}^2)$$

で定めるとき，次の問いに答えよ．

(１) 曲面 $\boldsymbol{p}$ の第一基本量 $E = \langle \boldsymbol{p}_u, \boldsymbol{p}_u \rangle$, $F = \langle \boldsymbol{p}_u, \boldsymbol{p}_v \rangle$, $G = \langle \boldsymbol{p}_v, \boldsymbol{p}_v \rangle$ を求めよ．ただし，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathbb{R}^3$ の標準的内積とし，$\boldsymbol{p}_u = \dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u}$, $\boldsymbol{p}_v = \dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v}$ とする．

(２) $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2;\ 1 \leq u \leq 2,\ 0 \leq v \leq 4u\}$ とするとき，曲面 $\boldsymbol{p}$ 上の領域

$$\boldsymbol{p}(U) = \{\boldsymbol{p}(u, v);\ (u, v) \in U\}$$

の面積を求めよ．

(３) 曲面 $\boldsymbol{p}$ の単位法ベクトル場 ν を求めよ．

(４) 曲面 $\boldsymbol{p}$ の Gauss (ガウス) 曲率 K と平均曲率 H を求めよ．

〔5〕 （解析）次の問いに答えよ．

（１）常微分方程式 $y'' - y' - 2y = 20\cos 2x$ の一般解を求めよ．

（２）$I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+4)^2}\,dx$ の値を求めよ．

〔6〕 (確率・統計) 次の問いに答えよ．

（１）2つの確率変数 X と Y は独立で，それぞれ指数分布 $Exp(\log 2)$ および $Exp(\log 3)$ に従うとする．

(i) $x > 0$ とする．$P(X > x)$ を求めよ．

(ii) $P(\min\{X, Y\} > 1)$ を求めよ．

(iii) $P(\max\{X, Y\} > 1)$ を求めよ．

注意：確率変数 X が指数分布 $Exp(\lambda)$ に従うとき，その分布の密度関数 $f_X(x)$ は

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

である．

（２）下の数値は A 君の問題演習 4 回の各点数である．

92　84　86　80

問題演習の点数は正規母集団からの無作為抽出したものと考える．

(i) 点数 x の標本平均 $\bar{x}$ を求めよ．

(ii) 点数 x の不偏分散 u^2 を求めよ．

(iii) 下の t 分布表より，母平均 μ に対する信頼度 95% の信頼区間を求めよ．

t 分布表 $P\left(T \geq t_n(\alpha)\right) = \alpha$

$n\backslash\alpha$	0.250	0.050	0.025	0.005
1	1.00	6.31	12.71	63.66
2	0.82	2.92	4.30	9.93
3	0.77	2.35	3.18	5.84
4	0.74	2.13	2.78	4.60
5	0.73	2.02	2.57	4.03

[数理科学専攻　(専門科目)]

解答例

〔1〕 (1) (i)　固有値を λ, 固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = {}^t(x\ y\ z) \neq \boldsymbol{0}$ とすると，$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ より，$|A - \lambda E| = -(\lambda - 3)(\lambda - 4)^2 = 0$. これより $\lambda = 3, 4$ (重解).

$\lambda = 3$ のとき．$(A - 3E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解いて，$2x + z = 0$, $2y + z = 0$. ゆえに，

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{x}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$\lambda = 4$ のとき．$(A - 4E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解いて，$x - 2y - z = 0$. ゆえに，

$$\boldsymbol{x} = c_2\boldsymbol{x}_2 + c_3\boldsymbol{x}_3 = c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(ii)　$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は 1 次独立であるから $\mathbb{R}^3$ の 1 つの基底である．このとき，

$$\begin{aligned}(f(\boldsymbol{x}_1)\ f(\boldsymbol{x}_2)\ f(\boldsymbol{x}_3)) &= (A\boldsymbol{x}_1\ A\boldsymbol{x}_2\ A\boldsymbol{x}_3) = (3\boldsymbol{x}_1\ 4\boldsymbol{x}_2\ 4\boldsymbol{x}_3) \\ &= (\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \boldsymbol{x}_3) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

とかけることから，$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ が求める表現行列である．

(2) (i)　行基本変形より，$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 3 & -9 & a-7 \\ -2 & 6 & a+3 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$.

$a = 1$ のとき．既約行階段行列は $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となるから，$\operatorname{rank} B = 1$.

$a \neq 1$ のとき．さらに行基本変形を行って，

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

よって，$\operatorname{rank} B = 2$.

(ii) $a=1$ のとき．(i) より，$x-3y-2z=0$. これより，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c_1+2c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. したがって，$\mathrm{Ker}\, g = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

$a \neq 1$ のとき．(i) より，$x-3y=0, z=0$. これより，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c_3 \\ c_3 \\ 0 \end{pmatrix} = c_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

したがって，$\mathrm{Ker}\, g = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

〔2〕 (1) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と極座標変換を考えると，閉領域

$$\left\{ (r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}$$

は閉領域

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ y \leq x,\ y \geq 0 \right\}$$

に 1 対 1 に写され，$\left| \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| = r$ である．よって，

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y)\, dxdy &= \iint_D \left(\frac{1}{1+x^2+y^2} + \frac{y}{x^2} \right) dxdy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_1^2 \left(\frac{1}{1+r^2} + \frac{1}{r} \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} \right) rdrd\theta \\ &= \frac{\pi}{4} \int_1^2 \frac{r}{1+r^2}\, dr + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} \left[\frac{1}{2}\log(1+r^2) \right]_1^2 + \left[\frac{1}{\cos\theta} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{8} \log\frac{5}{2} + \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

を得る．

(2) (i) $x=0$ のとき，$f_n(0)=0, n=1,2,\ldots$ である．$x \in (0,\infty)$ について，

$$|f_n(x)| = \left| \frac{\sin nx}{1+nx} \right| \leq \frac{1}{1+nx}$$

より，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ である．よって，$\{f_n(x)\}$ の極限関数 $f(x)$ は $f(x) = 0, x \in [0,\infty)$ である．また，任意の $n \in \mathbb{N}$ について，$f_n(\frac{1}{n}) = \dfrac{\sin 1}{2}$ であるので，$\{f_n(x)\}$ は区間 $[0,\infty)$ 上で一様収束しない．

(ii) $x=0$ のとき，$f_n(0)=0, n=1,2,\dots$ である．$x\in(0,\infty)$ について，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{nx}{2+n^3x^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\dfrac{2}{nx}+n^2x} = 0$$

である．よって，$\{f_n(x)\}$ の極限関数 $f(x)$ は $f(x)=0, x\in[0,\infty)$ である．
また，$f_n(x), x\in[0,\infty)$ の増減を調べると，

$$f_n'(x) = \frac{n(2+n^3x^2)-nx\cdot 2n^3x}{(2+n^3x^2)^2} = \frac{n(2-n^3x^2)}{(2+n^3x^2)^2}$$

より，$f_n'(x)>0, x\in\left[0,\sqrt{\frac{2}{n^3}}\right)$ であり，$f_n'(x)<0, x\in\left(\sqrt{\frac{2}{n^3}},\infty\right)$ である．よって，$f_n(x)$ は $x=\sqrt{\frac{2}{n^3}}$ で最大値 $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{n}}$ をとる．また，$f_n(x)\geq 0, x\in[0,\infty)$ である．以上より，$0\leq f_n(x)\leq \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{n}}, x\in[0,\infty)$ であるので，$\{f_n(x)\}$ は区間 $[0,\infty)$ 上で $f(x)=0, x\in[0,\infty)$ に一様収束することがわかる．

〔3〕 （代数）

（1）$PQ=T$ と $QP=S$ は異なるので，アーベル群ではない．

（2）H を G の部分群とする．$|G|=6$ であるから，ラグランジュの定理より，$|H|$ は $1,2,3,6$ のいずれか．

- $|H|=1$ のとき，$H=\{E\}$ である．
- $|H|=6$ のとき，$H=G$ である．
- $|H|=2$ のとき，$|H|$ は素数であるから H は巡回群である．G の元の中で order が 2 なのは P, Q, R だから，H は $\langle P\rangle=\{E,P\}$, $\langle Q\rangle=\{E,Q\}$, $\langle R\rangle=\{E,R\}$ のいずれか.（しかも，これら 3 つは相異なる.）
- $|H|=3$ のとき，$|H|$ は 素数であるから H は巡回群である．G の元の中で order が 3 なのは S, T だから，H は $\langle S\rangle=\{E,\ S,\ T\}$ $(=\langle T\rangle)$ である．

ゆえに，G の部分群は $\{E\}$, $\langle P\rangle$, $\langle Q\rangle$, $\langle R\rangle$, $\langle S\rangle$, G の 6 つである．

（3）$\{E\}$ と G は自明な正規部分群である．$Q^{-1}\langle P\rangle Q=\langle R\rangle$, $Q^{-1}\langle R\rangle Q=\langle P\rangle$, $P^{-1}\langle Q\rangle P=\langle R\rangle$ であるから $\langle P\rangle$, $\langle Q\rangle$, $\langle R\rangle$ は正規部分群ではない．$\langle S\rangle$ の位数は 3 であるから，指数は $|G|/3=6/3=2$ である．ゆえに，$\langle S\rangle$ は正規部分群である．

（4）$H=\langle S\rangle$ とおく．$|G/H|=2$ であり，2 は素数であるから巡回群である．元については例えば，H の元ではない P を用いて $G/H=\{H, PH\}$ と表せる．

〔4〕 （幾何）

（１） $\boldsymbol{p}_u(u,v)=\begin{pmatrix}\cos v\\ \sin v\\ 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_v(u,v)=\begin{pmatrix}-u\sin v\\ u\cos v\\ 1\end{pmatrix}$ より，

$$E=\left\langle\begin{pmatrix}\cos v\\ \sin v\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\cos v\\ \sin v\\ 1\end{pmatrix}\right\rangle=2$$

$$F=\left\langle\begin{pmatrix}\cos v\\ \sin v\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-u\sin v\\ u\cos v\\ 1\end{pmatrix}\right\rangle=1$$

$$G=\left\langle\begin{pmatrix}-u\sin v\\ u\cos v\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-u\sin v\\ u\cos v\\ 1\end{pmatrix}\right\rangle=u^2+1$$

である．

（２） $EG-F^2=2(u^2+1)-1^2=2u^2+1$ より，$\boldsymbol{p}(U)$ の面積 A は，

$$\begin{aligned}A&=\iint_U\sqrt{EG-F^2}\,dudv=\int_1^2\left\{\int_0^{4u}\sqrt{2u^2+1}\,dv\right\}du\\&=\int_1^2\sqrt{2u^2+1}\cdot 4udu=\int_3^9\sqrt{t}\,dt=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_3^9\\&=18-2\sqrt{3}\end{aligned}$$

である．

（３） $\boldsymbol{p}_u(u,v)$ と $\boldsymbol{p}_v(u,v)$ のベクトル積とその長さを求めると，

$$\boldsymbol{p}_u(u,v)\times\boldsymbol{p}_v(u,v)=\begin{pmatrix}\sin v-u\cos v\\ -\cos v-u\sin v\\ u\end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{p}_u(u,v)\times\boldsymbol{p}_v(u,v)|=\sqrt{2u^2+1}$$

となる．したがって，

$$\nu(u,v)=\frac{\boldsymbol{p}_u(u,v)\times\boldsymbol{p}_v(u,v)}{|\boldsymbol{p}_u(u,v)\times\boldsymbol{p}_v(u,v)|}=\frac{1}{\sqrt{2u^2+1}}\begin{pmatrix}\sin v-u\cos v\\ -\cos v-u\sin v\\ u\end{pmatrix}$$

である．

（４） $\boldsymbol{p}_{uu}(u,v)=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_{uv}(u,v)=\begin{pmatrix}-\sin v\\ \cos v\\ 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_{vv}(u,v)=\begin{pmatrix}-u\cos v\\ -u\sin v\\ 0\end{pmatrix}$ より，第二基本量 $L=\langle\boldsymbol{p}_{uu},\nu\rangle$, $M=\langle\boldsymbol{p}_{uv},\nu\rangle$, $N=\langle\boldsymbol{p}_{vv},\nu\rangle$ はそれぞれ

$$L=0,\quad M=-\frac{1}{\sqrt{2u^2+1}},\quad N=\frac{u^2}{\sqrt{2u^2+1}}$$

となる．したがって，

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{-\left(-\frac{1}{\sqrt{2u^2+1}}\right)^2}{2u^2+1} = -\frac{1}{(2u^2+1)^2}$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{GL - 2FM + EN}{2(EG - F^2)} = \frac{-2 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2u^2+1}}\right) + 2 \cdot \frac{u^2}{\sqrt{2u^2+1}}}{2\left(2u^2+1\right)} \\ &= \frac{u^2+1}{(2u^2+1)\sqrt{2u^2+1}} \end{aligned}$$

である．

〔5〕 (解析)

(1) $\eta = a\cos 2x + b\sin 2x$ の形の特解を探す．$\eta'' - \eta' - 2\eta = (-6a - 2b)\cos 2x + (2a - 6b)\sin 2x$ より係数比較して

$$-6a - 2b = 20, 2a - 6b = 0$$

なので $a = -3,\ b = -1$ である．特殊解 $\eta = -3\cos 2x - \sin 2x$ を得る．

また，特性方程式 $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ の解は $\lambda = -1, 2$ である．

以上より，求める一般解は $y = -3\cos 2x - \sin 2x + C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$.

(2) $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z^2+4)^2} = \dfrac{e^{iz}}{(z+2i)^2(z-2i)^2}$ とおく．上半平面にある極は $2i$ (位数 2).
$R > 0$ は十分大きいとする．$-R$ から R までの線分と円 $|z| = R$ の上半分をつないでできる単純閉曲線を C とする．
$K = \int_C f(z)\,dz$ は R によらず，$K = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ が成り立つ (後で述べる半円に沿う積分の評価から従う)．I は K の実部である．

$$\begin{aligned} K &= 2\pi i \mathrm{Res}\,[f(z); z = 2i] = 2\pi i \lim_{z\to 2i} \frac{d}{dz}\{(z-2i)^2 f(z)\} \\ &= 2\pi i \lim_{z\to 2i} \frac{d}{dz}\frac{e^{iz}}{(z+2i)^2} = 2\pi i \lim_{z\to 2i}\left\{\frac{ie^{iz}}{(z+2i)^2} - \frac{2e^{iz}}{(z+2i)^3}\right\} \\ &= \frac{\pi e^{-2}}{8} + \frac{\pi e^{-2}}{16} = \frac{3\pi e^{-2}}{16}. \end{aligned}$$

$I = \mathrm{Re}\,K = \dfrac{3\pi e^{-2}}{16}$.

[半円に沿う積分の評価] R が十分大きいとき $|z| = R$ 上で $|(z^2+4)^2| \geq R^4/2$ が成り立つ．$z = x + iy$ とすると，上半平面で $|e^{iz}| = e^{-y} \leq 1$.

$$\left|\int_{\text{半円}} f(z)\,dz\right| \leq \frac{2}{R^4} \times (\text{半円の長さ}) = \frac{2}{R^4} \times \pi R \to 0\ (R \to \infty).$$

〔6〕 （確率・統計）

（1） (i) 一般に $Exp(\lambda)$ に従う Z に対して

$$P(Z > x) = \int_x^\infty \lambda e^{-\lambda y} dy = \left[-e^{-\lambda y} \right]_x^\infty = e^{-\lambda x}$$

である．よって $P(X > x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ である．

(ii) 独立性および (i) の結論より

$$P(\min\{X, Y\} > 1) = P(X > 1)P(Y > 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

である．

(iii) 再び独立性および (i) の結論より

$$P(\max\{X, Y\} > 1) = 1 - P(\max\{X, Y\} \leq 1) = 1 - P(X \leq 1)P(Y \leq 1)$$

であるから

$$P(\max\{X, Y\} > 1) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

である．

（2） (i) 与えられたデータの大きさ N は 4 なので, データ x の標本平均 $\bar{x}$ は

$$\bar{x} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i = \frac{1}{4}(92 + 84 + 86 + 80) = \frac{342}{4} = 85.5$$

(ii) 不偏分散 u^2 の定義より

$$\begin{aligned} u^2 &= \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{3}\left[(6.5)^2 + (-1.5)^2 + (0.5)^2 + (-5.5)^2\right] \\ &= \frac{1}{3}(42.25 + 2.25 + 0.25 + 30.25) = \frac{75}{3} = 25 \end{aligned}$$

(iii) 自由度 3 の t 分布を考えると, t 分布表より $t_{(3)}(0.025) = 3.18$ なので

$$\bar{x} \pm 3.18\frac{u}{\sqrt{N}} = 85.5 \pm 3.18\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}} = 85.5 \pm 7.95 = \begin{cases} 77.55 \\ 93.45 \end{cases}$$

よって, 95% 信頼区間は

$$77.55 < \mu < 93.45$$

となり, A 君は 95% の確率で 77.55 点以上 93.45 点以下の点数を取る．

出題意図

〔1〕 （必須問題）線形代数学の基礎知識, 特に線形空間論の基本を理解しているかをみる. 行基本変形と連立方程式の解法, 固有値・固有ベクトル, 固有空間, 行列の対角化, 核空間と像空間, 線形空間の次元, 表現行列を求める手法を習得しているかをみる.

〔2〕 （必須問題）重積分計算の運用力および関数列の収束の判定力をみる.

〔3〕 （代数）群論における基本的概念である, アーベル群, 巡回群, 正規部分群, 部分群の列挙, 剰余群について理解しているかをみる.

〔4〕 （幾何）空間内の曲面に対する基本的な微分幾何学的量の求め方やあつかいを習得しているかどうかをみる.

〔5〕 （解析）常微分方程式 (定数係数 2 階非同次常微分方程式) と複素解析 (留数定理を用いて実積分を求めること) の標準的手法を習得しているかをみる.

〔6〕 （確率・統計）

(1) 確率論の基本が理解できているかをみる. 各問の出題意図は以下の通り.

- (i) 連続確率変数の密度関数および分布関数を理解しているか.
- (ii) 独立性を活用した計算ができるか.
- (iii) 余事象および独立性に着目した計算ができるか.

(2) 統計学の基本が理解できているかをみる. 各問の出題意図は下記の通り.

- (i) 与えられたデータより, 正しく標本平均の値を計算できるか.
- (ii) 不偏分散の定義を理解し, データより正しく不偏分散の値が計算できるか.
- (iii) 区間推定の概念を正しく理解しているか, t 分布表を用いて与えられた信頼度における区間推定を正しく実行できるか.