関西学院大学大学院理工学研究科
2025 年度入学試験
（二次：2025 年 2 月 27 日実施）

専門科目
数理科学専攻

（11:10-13:10　120 分）

【試験にあたっての注意】

1. 筆記用具以外はカバンに入れ、カバンは床の上に置くこと。
2. 携帯電話、スマートフォン、ウェアラブル端末、音楽プレーヤー等の音の出る機器の電源を切ること。
   なお、アラームを設定している人は解除してから電源を切り、カバンにしまうこと。
3. 時計のアラームは解除すること。携帯電話を時計として使用することは認めない。
4. 試験の途中退出は認めない。ただし、やむを得ない場合は挙手し監督者に知らせること。
5. 不審な言動は慎むこと。不正行為が発覚した場合、全科目を 0 点とする。
6. 試験用紙は以下の構成となっている。
   ①　問題冊子 1 冊
   ②　選択問題調査書、解答用紙
7. 指示があるまで問題冊子および解答用紙を開かないこと。
8. 解答用紙のホチキスは、はずさないこと（提出時もホチキス留めのまま提出すること）。
9. 各問題は、所定の解答用紙に解答すること。
10. 解答にあたっては、問題冊子および解答用紙に書かれた注意に従うこと。
11. 解答用紙には、氏名は記入せず、受験番号のみを記入すること。
12. 原則、解答用紙の裏面使用は不可。やむを得ず解答欄が不足する場合は＜裏面に続く＞と記載することで、裏面への記載を認める。
13. 試験終了後、問題冊子は各自持ち帰ること。

以上

［数理科学専攻（専門科目）］解答にあたって

必須問題２題、選択問題１題の合計３題（１題１００点）を解答すること。
必須問題は、線形代数１題、微積分１題である。
選択問題は、代数（群論・可換環論）、幾何（曲線論・曲面論）、解析（微分方程式・複素関数論）、確率・統計の４題から１題を選択すること。
ただし、選択問題は、指導を希望する教員から指示された分野の問題でなければならない。
解答用紙は１問につき１枚使用すること。

[数理科学専攻　（専門科目）]

〔1〕　（必須問題）次の問いに答えよ．

（1）行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値・固有ベクトルを求め，A を対角化せよ．

（2）行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ に対して，線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $f(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}$ と定義する．

(i) f の像 $\mathrm{Im}\, f = \{f(\boldsymbol{x}) \,|\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3\}$ の次元と基底（基）をそれぞれ求めよ．

(ii) f の核 $\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ の基底を求めよ．

(iii) 上の (i) と (ii) で求めた $\mathrm{Im}\, f$ の基底と $\mathrm{Ker}\, f$ の基底を合わせて $\mathbb{R}^3$ の基底とするとき，この $\mathbb{R}^3$ の基底に関する f の表現行列 C を求めよ．

〔2〕　（必須問題）次の問いに答えよ．

（1）閉領域 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$ および関数 $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + xy$ について，2 重積分 $\displaystyle\iint_D f(x, y)\, dxdy$ の値を求めよ．

（2）次の関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1,2,\ldots}$ が区間 $[0, 1]$ 上で各点収束しているかを調べよ．各点収束している場合には極限関数を求め，さらに，関数列が極限関数に区間 $[0, 1]$ 上で一様収束しているかを調べよ．

(i) $f_n(x) = \dfrac{\sqrt{n}x}{1 + nx^2}$

(ii) $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x + k)(x + k + 1)}$

〔3〕 （代数）次の問いに答えよ．

（１）p, q を 0 でない整数とする．$(p, q) = \mathbb{Z}$ となるための必要十分条件は，p と q が互いに素であることを示せ．ただし，(p, q) は p と q で生成された $\mathbb{Z}$ のイデアルである．

（２）$f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ に対し，剰余環 $\mathbb{Q}[x]/(x^3+1)$ の $f(x)$ を代表元とする剰余類を $\overline{f(x)}$ で表す．
$\overline{x^2+2}$ は $\mathbb{Q}[x]/(x^3+1)$ の単元（可逆元）であるか，理由をつけて答えよ．また，単元（可逆元）ならば，その逆元 $\overline{g(x)}$ を求めよ．ただし $0 \leq \deg g(x) < 3$ とする．

（３）$\alpha \in \mathbb{R}$ とする．写像 $\varphi : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{R}$ を，$f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ に対し $\varphi(f(x)) = f(\alpha)$ で定義する．

(i) $\operatorname{Ker}\varphi = \{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid \varphi(f(x)) = 0\}$ は $\mathbb{Q}[x]$ のイデアルであることを示せ．
(ii) $\alpha = \sqrt{3}$ のとき，イデアル $\operatorname{Ker}\varphi$ の生成元を求めよ．

〔4〕 （幾何）次の問いに答えよ．

（１）パラメータ表示された曲線 $\boldsymbol{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を

$$\boldsymbol{p}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t}\cos t \\ e^{2t}\sin t \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

で定めるとき，次の問いに答えよ．

(i) $\boldsymbol{p}(t)\ (0 \leq t \leq 1)$ の弧長を求めよ．
(ii) 曲線 $\boldsymbol{p}$ の t における曲率 $\kappa(t)$ を求めよ．

（２）平面 $\mathbb{R}^2$ の座標を (u, v) とする．パラメータ表示された曲面 $\boldsymbol{q} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ の第一基本形式が

$$ds^2 = \left(1+u^2\right)du^2 + 2uv\,du\,dv + \left(1+v^2\right)dv^2$$

であるとき，曲面 $\boldsymbol{q}$ 上を動く点 $\gamma(t) = \boldsymbol{q}(t^2, -t)\ (t \in \mathbb{R})$ の $t = 1$ における速さ $|\gamma'(1)|$ を求めよ．

〔5〕 （解析）次の問いに答えよ．

（1）常微分方程式 $y'' + 3y' - 4y = x^2 + x$ の一般解を求めよ．

（2）$I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 4x + 5}\, dx$ の値を求めよ．

〔6〕 （確率・統計）次の問いに答えよ．

（1）確率変数 X は平均 -5, 分散 4 の正規分布 $N(-5, 4)$ に従うものとし, $Y = \frac{X+2}{5}$ とする．

(i) X の密度関数 $f_X(x)$ を書け．

(ii) Y の密度関数 $f_Y(y)$ を求めよ．

(iii) Y の期待値 $E[Y]$ および Y の分散 $V[Y]$ を求めよ．

（2）統計学の授業を受講している 34 人の学生に 100 点満点の試験を行った．度数分布表は以下のようになった．

点数 x	50	60	70	80	90	100
度数 f	9	7	5	6	2	5

(i) 点数 x の範囲 R を求めよ．

(ii) 点数 x の平均値 $\bar{x}$ を求めよ．

(iii) 点数 x の中央値 Me を求めよ．

(iv) 点数 x の標準偏差 s を求めよ．

[数理科学専攻　（専門科目）]

解答例

〔1〕　（必須問題）

（1）固有値を λ, 固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = {}^t(x\ y\ z) \neq \boldsymbol{0}$ とすると，$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ より，$|A - \lambda E| = 0$. これより $\lambda = 2, 2, 3$.

i) $\lambda = 2$ (2 重解) のとき．$x - 2y - z = 0$ より，

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 = c_1\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

したがって重複度と同じ個数だけ固有ベクトルが存在する．

ii) $\lambda = 3$ のとき．$-2y - z = 0,\ x - 3y - z = 0$ より，

$$\boldsymbol{x} = c_3\boldsymbol{x}_3 = c_3\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

以上 i) と ii) より，固有ベクトルを順に列にならべて，$P = (\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \boldsymbol{x}_3) = \begin{pmatrix}2&1&1\\1&0&1\\0&1&-2\end{pmatrix}$ とすれば P は逆行列をもち，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ と対角化される．

（2）(i) 行基本変形より，$B = \begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&-3\\1&-1&4\end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$. これより，$\dim \mathrm{Im}\, f = \mathrm{rank}\, B = 2$. また，先頭の 1 が残った列にあったベクトル $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \boldsymbol{w}_1,\ \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \boldsymbol{w}_2$ を選んで，$\mathrm{Im}\, f = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \rangle$.

(ii) 既約行階段行列より，$x + z = 0,\ y - 3z = 0$. よって $\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix} = \boldsymbol{w}_3$ とすると，$\mathrm{Ker}\, f = \langle \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

(iii) $\begin{pmatrix}-1&4&0\\-3&4&0\\5&-4&0\end{pmatrix} = (f(\boldsymbol{w}_1)\ f(\boldsymbol{w}_2)\ f(\boldsymbol{w}_3)) = (\boldsymbol{w}_1\ \boldsymbol{w}_2\ \boldsymbol{w}_3)\, C = \begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&3\\1&-1&1\end{pmatrix} C$

をみたす C が求める表現行列．よって，

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

〔2〕 （必須問題）

（１）$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と極座標変換を考えると，閉領域

$$\left\{ (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

は閉領域

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0 \}$$

に 1 対 1 に写され，$\left| \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = r$ である．よって，

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y)\, dxdy &= \iint_D (\sqrt{4 - x^2 - y^2} + xy)\, dxdy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 (\sqrt{4 - r^2} + r^2 \cos\theta \sin\theta) r\, drd\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \int_1^2 r\sqrt{4 - r^2}\, dr + \int_1^2 r^3\, dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta\, d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{3}(4 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 + \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_1^2 \cdot \left[-\frac{1}{4} \cos 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi + \frac{15}{8} \end{aligned}$$

を得る．

（２）(i) $x \in [0, 1]$ について，$f_n(x) = \dfrac{\sqrt{n}x}{1 + nx^2} = \dfrac{x}{\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}x^2}$ より，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{x}{\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}x^2} = 0$ である．よって，$\{f_n(x)\}$ の極限関数 $f(x)$ は $f(x) = 0, x \in [0, 1]$ である．また，任意の $n \in \mathbb{N}$ について，$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \dfrac{1}{2}$ であるので，$\{f_n(x)\}$ は区間 $[0, 1]$ 上で一様収束しない．

(ii) $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x + k)(x + k + 1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{x + k} - \frac{1}{x + k + 1} \right) = \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x + n + 1}$ より，任意の $x \in [0, 1]$ について，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x + n + 1} \right) = \frac{1}{x + 1}$$

であるので，$\{f_n(x)\}$ の極限関数 $f(x)$ は $f(x)=\dfrac{1}{x+1}, x\in[0,1]$ である．また，任意の $x\in[0,1]$ について，

$$\left|\frac{1}{x+1}-f_n(x)\right|=\frac{1}{x+n+1}\leq\frac{1}{n+1}$$

であるので，$\{f_n(x)\}$ は区間 $[0,1]$ 上で $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ に一様収束することがわかる．

〔3〕 （代数）

(1)

$$\begin{aligned}(p,q)=\mathbb{Z} \quad\Longleftrightarrow\quad (p,q)\ni 1 \quad&\Longleftrightarrow\quad px+qy=1 \text{ をみたす } x,y\in\mathbb{Z} \text{ が存在する}\\ &\Longleftrightarrow\quad \gcd(p,q)=1.\end{aligned}$$

(2) ユークリッドの互除法

$$\begin{aligned}x^3+1&=x(x^2+2)-2x+1\\ x^2+2&=(-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4})(-2x+1)+\frac{9}{4}\end{aligned}$$

より, $\gcd(x^3+1,x^2+2)=1$. よって単元である．ユークリッドの互除法より

$$\frac{2x+1}{4}(x^3+1)+\frac{-2x^2-x+4}{4}(x^2+2)=\frac{9}{4}$$

が得られるので $\overline{x^2+2}^{-1}=\overline{\dfrac{-2x^2-x+4}{9}}$.
単元であることは素元分解 $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ からもわかる．

(3) (i) $f(x),g(x)\in\mathrm{Ker}\,\varphi$, $h(x)\in\mathbb{Q}[x]$ に対し

$$\begin{aligned}\varphi(f(x)-g(x))=(f-g)(\alpha)=f(\alpha)-g(\alpha)=0,\\ \varphi(f(x)h(x))=(fh)(\alpha)=f(\alpha)h(\alpha)=0\end{aligned}$$

であるから $f(x)-g(x)\in\mathrm{Ker}\,\varphi$, $f(x)h(x)\in\mathrm{Ker}\,\varphi$ が成り立つ．よって $\mathrm{Ker}\,\varphi$ はイデアルである．

(ii) $g(x)=x^2-3$ とおくと $g(\sqrt{3})=0$ であるから，$g(x)\in\mathrm{Ker}\,\varphi$ である．$f(x)\in\mathrm{Ker}\,\varphi$ とすると，

$$f(x)=q(x)g(x)+ax+b,\qquad q(x)\in\mathbb{Q}[x],a,b\in\mathbb{Q}$$

と表せる．よって

$$0=\varphi(f(x))=f(\sqrt{3})=q(\sqrt{3})g(\sqrt{3})+a\sqrt{3}+b=a\sqrt{3}+b$$

より $a=b=0$ が得られるので $f(x)=q(x)g(x)$, すなわち $f(x)\in(g(x))$.
したがって $\mathrm{Ker}\,\varphi=(g(x))=(x^2-3)$.

〔4〕　（幾何）

（１） (i) 曲線 $\boldsymbol{p}$ の t における速度ベクトル $\boldsymbol{p}'(t)$ と速さ $|\boldsymbol{p}'(t)|$ はそれぞれ

$$\boldsymbol{p}'(t) = \begin{pmatrix} e^{2t}(2\cos t - \sin t) \\ e^{2t}(2\sin t + \cos t) \end{pmatrix}$$
$$|\boldsymbol{p}'(t)| = \sqrt{\big(e^{2t}(2\cos t - \sin t)\big)^2 + \big(e^{2t}(2\sin t + \cos t)\big)^2} = \sqrt{5}e^{2t}$$

である．したがって，$\boldsymbol{p}(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ の弧長は

$$\int_0^1 |\boldsymbol{p}'(t)|\,dt = \int_0^1 \sqrt{5}e^{2t}\,dt = \left[\frac{\sqrt{5}}{2}e^{2t}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{2}(e^2 - 1)$$

である．

(ii) $\boldsymbol{p}''(t) = \begin{pmatrix} e^{2t}(3\cos t - 4\sin t) \\ e^{2t}(3\sin t + 4\cos t) \end{pmatrix}$ より，

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= \frac{\det\big(\boldsymbol{p}'(t), \boldsymbol{p}''(t)\big)}{|\boldsymbol{p}'(t)|^3} = \frac{\det\begin{pmatrix} e^{2t}(2\cos t - \sin t) & e^{2t}(3\cos t - 4\sin t) \\ e^{2t}(2\sin t + \cos t) & e^{2t}(3\sin t + 4\cos t)\end{pmatrix}}{\big(\sqrt{5}e^{2t}\big)^3} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}e^{2t}}\end{aligned}$$

である．

（２） $\gamma(t)$ の速度ベクトルは

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= \big\{\boldsymbol{q}(t^2, -t)\big\}' = \boldsymbol{q}_u(t^2, -t)\cdot(t^2)' + \boldsymbol{q}_v(t^2, -t)\cdot(-t)' \\ &= 2t\boldsymbol{q}_u(t^2, -t) - \boldsymbol{q}_v(t^2, -t)\end{aligned}$$

であるから，

$$\gamma'(1) = 2\boldsymbol{q}_u(1, -1) - \boldsymbol{q}_v(1, -1)$$

である．一方，$ds^2 = \big(1 + u^2\big)\,du^2 + 2uvdudv + \big(1 + v^2\big)\,dv^2$ より，$\mathbb{R}^2$ の内積を $\langle\cdot, \cdot\rangle$ で表すと，

$$\begin{aligned}&\langle \boldsymbol{q}_u(u,v),\, \boldsymbol{q}_u(u,v)\rangle = 1 + u^2, \quad \langle \boldsymbol{q}_u(u,v),\, \boldsymbol{q}_v(u,v)\rangle = uv \\ &\langle \boldsymbol{q}_v(u,v),\, \boldsymbol{q}_v(u,v)\rangle = 1 + v^2\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{q}_u(1,-1),\, \boldsymbol{q}_u(1,-1)\rangle &= 1 + 1^2 = 2 \\ \langle \boldsymbol{q}_u(1,-1),\, \boldsymbol{q}_v(1,-1)\rangle &= 1\cdot(-1) = -1 \\ \langle \boldsymbol{q}_v(1,-1),\, \boldsymbol{q}_v(1,-1)\rangle &= 1 + (-1)^2 = 2\end{aligned}$$

である．したがって，

$$\begin{aligned}\langle \gamma'(1),\, \gamma'(1)\rangle &= \big\langle 2\boldsymbol{q}_u(1,-1) - \boldsymbol{q}_v(1,-1),\, 2\boldsymbol{q}_u(1,-1) - \boldsymbol{q}_v(1,-1)\big\rangle \\ &= 2\cdot 2\cdot \langle \boldsymbol{q}_u(1,-1),\, \boldsymbol{q}_u(1,-1)\rangle \\ &\qquad + 2\cdot(-1)\cdot\langle \boldsymbol{q}_u(1,-1),\, \boldsymbol{q}_v(1,-1)\rangle \\ &\qquad + (-1)\cdot 2\cdot\langle \boldsymbol{q}_v(1,-1),\, \boldsymbol{q}_u(1,-1)\rangle \\ &\qquad + (-1)\cdot(-1)\cdot\langle \boldsymbol{q}_v(1,-1),\, \boldsymbol{q}_v(1,-1)\rangle \\ &= 14\end{aligned}$$

となるので，

$$|\gamma'(1)| = \sqrt{\langle \gamma'(1),\, \gamma'(1)\rangle} = \sqrt{14}$$

である．

〔5〕 (解析)

（1） $y = ax^2 + bx + c$ の形の特解を探す．$2a + 3(2ax+b) - 4(ax^2+bx+c) = x^2 + x$ より係数比較して

$$-4a = 1, 6a - 4b = 1, 2a + 3b - 4c = 0$$

なので $a = -\dfrac{1}{4},\ b = -\dfrac{5}{8},\ c = -\dfrac{19}{32}$.
また，特性方程式 $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$ の解は $\lambda = -4, 1$ である．
以上より，求める一般解は $y = -\dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{5}{8}x - \dfrac{19}{32} + C_1 e^{-4x} + C_2 e^x$.

（2） $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2+4z+5} = \dfrac{e^{iz}}{(z+2-i)(z+2+i)}$ とおく．上半平面にある極は $-2+i$. $R > 0$ は十分大きいとする．$-R$ から R までの線分と円 $|z| = R$ の上半分をつないでできる単純閉曲線を C とする．
$K = \int_C f(z)\,dz$ は R によらず，$K = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ が成り立つ (後で述べる半円に沿う積分の評価から従う)．I は K の実部である．

$$\begin{aligned} K &= 2\pi i \mathrm{Res}\,[f(z); z = -2+i] = 2\pi i \lim_{z\to -2+i}(z+2-i)f(z) \\ &= 2\pi i \lim_{z\to \lim_{z\to -2+i}} \frac{e^{iz}}{z+2+i} = \pi e^{-1-2i}. \end{aligned}$$

$I = \mathrm{Re}\,K = \pi e^{-1}\cos 2$.
[半円に沿う積分の評価] R が十分大きいとき $|z| = R$ 上で $|z^2+4z+5| \geq R^2/2$ が成り立つ．上半平面で $|e^{iz}| = e^{-y} \leq 1$.

$$\left|\int_{\text{半円}} f(z)\,dz\right| \leq \frac{2}{R^2} \times (\text{半円の長さ}) = \frac{2}{R^2} \times \pi R \to 0\ (R \to \infty).$$

〔6〕　（確率・統計）

(1) (確率) 正規分布 $N(-5,4)$ の密度関数は

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-\frac{(x+5)^2}{8}}$$

である．X および Y の分布関数をそれぞれ F_X，F_Y とすると $F_Y(y) = F_X(5y-2)$ である．よって $f_Y(y) = F_Y'(y) = 5f_X(5y-2)$ である．これより

$$f_Y(y) = \frac{5}{\sqrt{8\pi}} e^{-\frac{(5y+3)^2}{8}}$$

を得る．以上より Y は正規分布 $N(-\frac{3}{5}, \frac{4}{25})$ に従う．すなわち $E[Y] = -\frac{3}{5}$，$V[Y] = \frac{4}{25}$ である．

(2) (統計)

(i) 与えられたデータの最大値は 100, 最小値は 50 なので, データの範囲 R は

$$R = 100 - 50 = \mathbf{50}$$

(ii) 平均値 $\bar{x}$ は, 定義より

$$\bar{x} = \frac{50 \cdot 9 + 60 \cdot 7 + 70 \cdot 5 + 80 \cdot 6 + 90 \cdot 2 + 100 \cdot 5}{34} = \mathbf{70}$$

(iii) 度数分布表における中央値は, 小さい階級から度数を加算し, 累積度数が最初に学生数の半分, つまり $\frac{34}{2} = 17$ を越える階級なので

$$Me = \mathbf{70}$$

(iv) 分散 s^2 は, 定義より

$$s^2 = \frac{9 \cdot (50-70)^2}{34} + \frac{7 \cdot (60-70)^2}{34} + \frac{5 \cdot (70-70)^2}{34} + \frac{6 \cdot (80-70)^2}{34} + \frac{2 \cdot (90-70)^2}{34} + \frac{5 \cdot (100-70)^2}{34} = 300$$

標準偏差は, 分散の平方根なので

$$s = \sqrt{300} = \mathbf{10\sqrt{3}}$$

[数理科学専攻　（専門科目）]

出題意図

〔1〕　（必須問題）　線形代数学の基礎知識，特に線形空間論の基本を理解しているかをみる．行基本変形と連立方程式の解法，固有値・固有ベクトル，固有空間，行列の対角化，核空間と像空間，線形空間の次元，表現行列を求める手法を習得しているかをみる．

〔2〕　（必須問題）　重積分計算の運用力および関数列の収束の判定力をみる．

〔3〕　（代数）　イデアル，剰余環などの可換環の基礎事項を理解しているかをみる．可逆元やイデアルを求める手法を習得しているかをみる．

〔4〕　（幾何）　(1) では平面曲線に関して，弧長や曲率などの基本的な微分幾何的量のあつかいを，(2) では曲面の第一基本形式について定義や利用法を，それぞれ理解し習得しているかどうかをみる．

〔5〕　（解析）　常微分方程式 (定数係数 2 階非同次常微分方程式) と複素解析 (留数定理を用いて実積分を求めること) の標準的手法が身についているかをみる．

〔6〕　（確率・統計）

（１）(確率)　確率論の基本が理解できているかをみる．各小問において具体的に以下の点についてみる．

- (i) 連続確率変数の密度関数を理解しているか．
- (ii) 変換によって得られる連続確率変数の密度関数を計算できるか．
- (iii) 連続確率変数の密度関数から，期待値と分散を計算できるか．

（２）(統計)　統計学の基本が理解できているかをみる．各小問において具体的に以下の点についてみる．

- (i) データの最大値と最小値の差によって表され，データの散らばり具合を表す指標である範囲を理解できているか．
- (ii) 度数分布表の平均値を正しく計算できるか．
- (iii) 度数分布表の中央値を正しく計算できるか．
- (iv) 度数分布表の分散を正しく計算できるか，標準偏差を正しく理解しているか．