報告用紙②

関西学院大学　研究成果報告

2024年　3月　14日

関西学院大学 学長殿

所属：理工学研究科
職名：博士研究員
氏名：紫垣　孝洋

以下のとおり、報告いたします。

研究制度	☐特別研究期間　☐自由研究期間 ☐大学共同研究　☐個人特別研究費 ☒博士研究員 ※国際共同研究交通費補助については別様式にて作成してください。
研究課題	常微分方程式の固有値問題の完全WKB解析
研究実施場所	神戸三田キャンパス　IV号館　数理研究室6
研究期間	2023年　4月　1日　～　2024年　3月　31日（　12ヶ月）

◆ **研究成果概要**　(2,500字程度)
上記研究課題に即して実施したことを具体的に記述してください。

●研究目的
(a)まだ応用がされていない接続公式を用いた、固有値問題の完全WKB解析の例を与える。
(b)具体的な1階非線型方程式について、理論的な整備と並行して固有値問題への応用を考える。

●研究内容
(a)(b)の目的を達するため、次の(A)(B)の研究を行った。

(A) 中間子の数理モデルに関する固有値問題
酒井忠勝氏・杉本茂樹氏によると、中間子の質量はある2階常微分方程式の境界条件下での固有値として表される。また固有値問題は複素数平面における接続問題と関係している。本年度に出版された論文[2]では、両氏の数理モデルに現れる微分方程式について、固有値問題と完全WKB解析との関連についての研究で得られたことがまとめられている。数理モデルに現れる微分方程式へ適切にパラメータを導入すると、固有値問題に現れる方程式は興味深い完全WKB解析の理論的構造を有しており、パラメータの偏角が0の場合に元の問題と関係づけられる。
[2]の主結果は、（0を含まない）ある領域内の偏角をもつパラメータに対し、固有値の満たす方程式の主要部が、WKB解の接続公式を用いて具体的に得られるというものであった。

パラメータの偏角が0に近づくにつれ、計算に必要なStokes曲線が複雑な形状となり、出力にも時間を要する。この点において、元の問題と関係づけられる場合、すなわちパラメータの偏角が0の場合の議論には困難を伴う。そこで本年度は、Stokes曲線を重要なものに限定するなどの工夫のもとで、Mathematicaを用いてStokes曲線の描画を行い、Stokes曲線の形状の変化を観察した。その結果、[2]より偏角が0に近いある領域においても、[2]で得られた結果と同様の結果が成り立つことが分かった。

偏角が0の場合のStokes曲線を、何らかの意味でのStokes曲線の形状の変化の極限として理解し、固有値の満たす条件式も偏角が0の場合を含む形で記述することが今後の課題である。Stokes曲線の描画プログラムの改善に引き続き取り組むとともに、形状の変化に規則性がないか観察することで、課題の解決へとつなげたい。

(B) Bender, Fring, Komijaniによる、ある1階非線形常微分方程式の固有値問題

Bender, Fring, Komijani の研究では、ある1階非線形常微分方程式の解の無限遠での特定の挙動によって境界条件が定義された。この研究では境界条件のもとで微分方程式の解が一意的に定まることを用いて、解の初期値が固有値として定義され、固有値の漸近的な挙動が具体的に記述された。論文[1]では、この問題を完全WKB解析の問題として捉え、境界条件を満たす解がパラメータの級数解で表せることを示し、その級数解に対して無限遠を含む領域での解析的意味づけを与えた。

境界条件を満たす解の初期値である固有値の漸近的な挙動を明らかにするためには、原点を含む領域において解析的な意味を持つ解を構成すること、またこの解が[1]で記述された無限遠を含む領域において解析的な意味を持つ解を解析接続させたものとどう関係するか（接続問題）を考えること、以上の2つが重要である。

まず原点を含む領域で解析的な意味を持つ解の構成に関しては、今年度の秋以降にSchaefke氏(University of Strasbourg)と議論を重ねた結果、J.P.Ramis氏とSchaefke氏による論文 Gevrey separation of fast and slow variables での議論を用いることが有効であると期待している。現段階では適切な変数変換のもとで、考えている方程式を fast and slow variables の枠組みに近い形へ方程式を変換できることがわかっており、今後もこの方向性での研究を試みたい。

次に接続問題に関しては、局所的な変換論を構成することを試みたい。ここでいう局所的な変換論とは、Stokes曲線の始点（変わり点）であるt=1の近傍で、何らかの「標準形」への変換級数を構成することであり、接続問題が既知の「標準形」に帰着させるという考え方である。今後は「標準形」の有力な候補であると考えているAiry型のRiccati方程式の場合について、評価の見直しにも取り組みたい。

さらにRiccati方程式に関する完全WKB解析の先行研究の結果を踏まえると、接続問題における関係式を記述する際には、任意定数を含む解である1-parameter解と呼ばれる解を用いると期待される。今年度は1-parameter解の構成も行ったが、この解は前述のfast and slow variables の枠組みから得られる解と深い関係があるとも予想されるので、二つの解の関連性を明らかにすることも今後の目標の一つである。

●参考文献

[1] T. Shigaki: Toward exact WKB analysis of nonlinear eigenvalue problems, 数理解析研究所講究録別冊 B75 (2019), 177-201.
[2] T. Shigaki: Exact WKB analysis of eigenvalue problems for an ordinary differential equation arising from the mathematical model of mesons, Funkcialaj Ekvacioj, 66(2023), 125-157.

以　上