

関西学院大学 研究成果報告

2023年 3月25日

関西学院大学 学長殿

所属：理工学研究科
職名：博士研究員
氏名：高橋 甫宗

以下のとおり、報告いたします。

研究制度	<input type="checkbox"/> 特別研究期間 <input type="checkbox"/> 自由研究期間 <input type="checkbox"/> 大学共同研究 <input type="checkbox"/> 個人特別研究費 <input checked="" type="checkbox"/> 博士研究員 ※国際共同研究交通費補助については別様式にて作成してください。
研究課題	単純極型退化をする超幾何方程式の完全WKB解析
研究実施場所	関西学院大学
研究期間	2023年 4月1日 ～ 2024年 3月31日 (12ヶ月)

◆ 研究成果概要 (2,500字程度)

上記研究課題に即して実施したことを具体的に記述してください。

完全WKB解析では、シュレディンガー型常微分方程式にしかるべき形で、ラージパラメータと呼ばれる実数値をとるパラメータを導入し、通称、単純変わり点（ポテンシャルの単純零点または単純極）で正規化されたWKB解と呼ばれるラージパラメータについての形式的べき級数解を構成し、さらに、Borel総和法を適用することで、解析解を構成する。というのが一連の流れである。また、このBorel和に、Watsonの補題を用いることで、漸近展開を容易に得ることができる。より正確には、これらのBorel和がいつ確定するのかを観察するためにはStokes曲線、またはStokesグラフの位相的形状が重要になってくる。そのため、その分類もまた重要な研究対象である。

本研究は単純極型退化をするGaussの超幾何微分方程式という、様々な特殊函数の研究において極めて重要な役割をもっている、2階の線形常微分方程式についての研究である。単純極を持つという意味は、より具体的には、適当な未知関数の変換によってGaussの方程式から、一階項を消去した1次元定常状態のシュレディンガー型方程式におけるポテンシャルが、原点に単純極をもつ場合について、完全WKB解析をもちいて解析し、特異点における古典的な解の組と、構成したWKB解のBorel和との線形関係を調査し、それらのラージパラメータについての漸近挙動を解析することが目的である。また、本研究は関西学院大の反田美香氏との共同研究である。

より具体的に、上記の単純極のケースというのは、超幾何微分方程式の3つのパラメータのうちのひとつを1に近づけるといふ極限操作をおこなう場合に対応している。このような方程の特性べき数の差が整数差となるような場合については古典的な研究が存在している。特に、今回のような単純極（今回の場合では原点）における標準解の形についてはよく知られており、これらを改めて完全WKB解析の観点から考えなおすことで、パラメータについての漸近展開などについて新たな知見をえる可能性があるという意味で意義のある研究だと思われる。

2023年度の研究において、前述の反田美香氏とは、学内またはzoomによって、何度もゼミを行い、研究を進めてきた。その結果として、現状では、単純極にあたる原点における古典的な標準解と原点で規格化されたWKB解のBorel和との関係式が、形式的にはあるが、求めることができた。もちろん、前述のとおり、この結果を得るためには単純極型のケースにおけるStokes曲線の分類が必要であり、これについても、よりStokesグラフがより退化したケースからの摂動と、ポテンシャルのパラメータについての連続性の利用を考えるという手法をもちいることで、パラメータの属するパラメータ空間内の領域ごとのStokesグラフの形状の分類に成功している。「形式的」という意味は、本研究の手法では青木、反田両氏との共同研究（これについては、2021年の日本数学会ジャーナルにおいて、論文“The hypergeometric function, the confluent hypergeometric function and WKB solutions”として発表された。）によってすでに得られている結果である、単純極ではない、より一般的なパラメータをいれた場合での標準解と単純変わり点で規格化されたWKB解のBorel和との関係式に対してパラメータについての極限操作を施すのであるが、その際、それらのBorel和が単純極で規格化されたWKB解のBorel和に収束することを証明する必要があるが、それについてはまだ証明できていないので、現状ではこれを仮定しての結果であるという意味である。以上の結果は、2023年度秋季日本数学会において発表済みである。論文については、今後の主要課題となる、前述の、Borel和のパラメータについての極限をとったときの収束性を証明してからの発表となる予定である。

また、これらの研究に続いての予定についても打ち合わせを行っている。通常、WKB解のBorel和は、積分で定義されているが、その被積分函数にBorel変換を含むので、そのBorel変換の特異点の解析が完全WKB解析においては非常に重要である。このことから、今回のような単純極型の場合に構成したWKB解のBorel変換の特異点の解析が今後の課題のひとつに挙げられ、そのためにはVoros係数とよばれる量を求めなければならない。まら、標準解とWKB解の関係式を求めるといふ方向では、今後、原点で正規化されたWKB解と、原点でないもうひとつの確定特異点である1における古典的な解との線形関係を求めることや、原点で正規化するのではなく、もう一つの単純変わり点で正規化されたWKB解と、1での標準解との線形関係式を求めるといふことが候補として挙げられた。こちらについては、Voros係数を求めることよりも多少は取り組みやすいのではないかと考えている。以上が、今年度に得られた研究成果である。

以上

提出期限：研究期間終了後2ヶ月以内

※個人特別研究費：研究費支給年度終了後2ヶ月以内 博士研究員：期間終了まで

提出先：研究推進社会連携機構（NUC）

※特別研究期間、自由研究期間の報告は所属長、博士研究員は研究科委員長を経て提出してください。

◆研究成果概要は、大学ホームページにて公開します。研究遂行上大学ホームページでの公開に支障がある場合は研究推進社会連携機構までご連絡ください。