

関西学院大学大学院理工学研究科

2025 年度入学試験

(二次：2025 年 2 月 27 日実施)

専門科目

物理・宇宙物理学専攻

(11:10-13:10 120 分)

【試験にあたっての注意】

1. 筆記用具以外はカバンに入れ、カバンは床の上に置くこと。
2. 携帯電話、スマートフォン、ウェアラブル端末、音楽プレーヤー等の音の出る機器の電源を切ること。
なお、アラームを設定している人は解除してから電源を切り、カバンにしまうこと。
3. 時計のアラームは解除すること。携帯電話を時計として使用することは認めない。
4. 試験の途中退出は認めない。ただし、やむを得ない場合は挙手し監督者に知らせること。
5. 不審な言動は慎むこと。不正行為が発覚した場合、全科目を 0 点とする。
6. 試験用紙は以下の構成となっている。
 - ① 問題冊子 1 冊
 - ② 解答用紙
7. 指示があるまで問題冊子および解答用紙を開かないこと。
8. 解答用紙のホチキスは、はずさないこと（提出時もホチキス留めのまま提出すること）。
9. 各問題は、所定の解答用紙に解答すること。
10. 解答にあたっては、問題冊子および解答用紙に書かれた注意に従うこと。
11. 解答用紙には、氏名は記入せず、受験番号のみを記入すること。
12. 原則、解答用紙の裏面使用は不可。やむを得ず解答欄が不足する場合は＜裏面に続く＞と記載することで、裏面への記載を認める。
13. 試験終了後、問題冊子は各自持ち帰ること。

以上

〔物理・宇宙物理学専攻（専門科目）〕

次の〔Ⅰ〕～〔Ⅳ〕すべてに解答せよ。
なお、解答用紙は大問 1 題につき 1 枚使用すること。

[Ⅰ]

あなたが行った卒業研究(大学4年生の時に行った研究)について，その課題，目的，方法，結果，考察などを簡潔に記しなさい．なお，卒業研究を行わなかったものは大学院に入ってからの研究計画を述べなさい．

[II] 以下の問(1)~(5)に答えよ.

バネ定数 k で自然長 l の十分軽い2つのバネの間に質量 M の質点を直線状につなぎ, なめらかな水平面上に置く.

図1のように, それぞれのバネの他端を壁に固定し, バネの長さ方向に振動させた. 初期状態でバネは自然長である.

- (1) 質点の初期位置からの変位を x として, 質点の運動方程式をかけ.
- (2) 運動方程式を解いて角振動数及び一般解を求めよ.

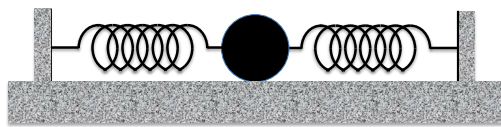


図 1:

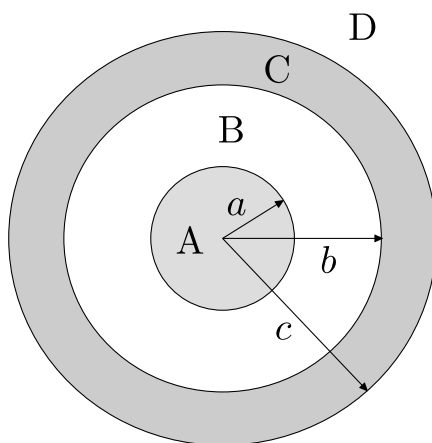
図1で, 両端の壁の固定を外して代わりに質量 m の質点をつけ, バネの長さ方向に初速度を与えた. 初期状態でバネは自然長であり, 3 質点それぞれの初期位置からの変位を, 左の質点から順に x_1, x_2, x_3 とする.

- (3) 3つの質点についての運動方程式をかけ.
- (4) 3つの質点の運動は基準振動を通じて理解できる. 基準振動を $x_1(t) = Ae^{i\omega t}$, $x_2(t) = Be^{i\omega t}$, $x_3(t) = Ce^{i\omega t}$ (A, B, C は任意定数) とおいて, 基準角振動数を求めよ.
- (5) それぞれの基準振動について振幅の比 $A : B : C$ を求めよ.

[III] 以下の問 [A], [B] に答えよ.

[A] 半径 a の導体球が電荷 $2Q$ を持つ. ただし, $Q > 0$ とする. この球と同心の外半径 c , 内半径 b の導体球殻が電荷 $-Q$ を持つ.

- (1) 図の領域 A, B, C, D における電場の大きさを求めよ.
- (2) 球殻の内表面の電荷を求めよ.
- (3) 球殻の外表面の電荷を求めよ.



[B] 距離 d だけ離れた平行板電極があり, 極板間の電位差が ϕ であるとする. ただし, 極板の面積は十分広いとする. また, 極板に平行に一樣な磁束密度 B の磁場があるとする. 陽極から初速度がほぼゼロで極板に垂直な方向に電荷 q (ただし, $q > 0$) を持つ粒子が飛び出したとして, 以下の問に答えよ. ただし, 粒子の質量を m , 電場の向きを y 軸の向き, 磁場の向きを z 軸の向きとする. また, 陽極の y 座標を $y = 0$ とする.

- (1) 粒子の速度を (v_x, v_y, v_z) とする. 粒子の運動方程式を書け.
- (2) 小問 (1) で求めた方程式を解いて粒子の位置 (x, y, z) を時間 t の関数として求めよ. ただし, 初期条件を時刻 $t = 0$ で $x = y = z = 0$, $v_x = v_y = v_z = 0$ とする.
- (3) 粒子が陰極板に到達しないための ϕ に対する条件を求めよ.

[IV] 以下の問 (1) ~ (8) に答えよ.

N 個の粒子からなる内部エネルギー E の熱平衡状態にある固体を考える. ただし, この固体を構成する粒子は空間上の異なる点に固定され, 各粒子は独立に一定のエネルギー 0 の状態 (基底状態) とエネルギー ϵ (> 0) の状態 (励起状態) の 2 つの状態のいずれかのみをとるとする. また, ボルツマン定数を k_B とおく.

(1) この系の励起状態にある粒子の数を求めよ.

(2) この系のとりうる状態の数を求めよ.

この系において, 基底状態にある粒子の個数, 励起状態にある粒子の個数, および全粒子数 N が十分大きい場合を考え, 十分大きい自然数 k に対して近似式 $k! \doteq \left(\frac{k}{e}\right)^k$ が成り立つとする.

(3) 小問 (2) で得られた状態数の近似式を求めよ.

(4) ボルツマンの原理を用いて, この系のエントロピーを求めよ.

(5) この系の温度を求めよ.

(6) 高温極限におけるこの系の内部エネルギーを求めよ.

(7) 絶対零度におけるこの系のエントロピーを求めよ.

(8) この系の熱容量を求めよ.

(解答例) [Ⅱ]

(1) $M\ddot{x}(t) = -2kx$

(2) 単振動の微分方程式なので、角振動数 ω は $\omega = \sqrt{\frac{2k}{M}}$ であり、一般解は

$$x(t) = A \cos \left(\sqrt{\frac{2k}{M}} t + \phi \right) \quad A, \phi \text{ は任意定数}$$

(3) 各質点についてのニュートンの運動方程式をそれぞれ記述する。

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1(t) &= k(x_2 - x_1) \\ M\ddot{x}_2(t) &= -k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2) \\ m\ddot{x}_3(t) &= -k(x_3 - x_2) \end{cases} \quad (1)$$

あるいは,

系の運動エネルギー $T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_3^2$ およびポテンシャルエネルギー $U = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k(x_3 - x_2)^2$ とラグランジアン: $L = T - U$ を用いて Lagrange 方程式: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$ からの導出する。

(4) 与えられた3つの基準振動より, $\ddot{x}_1(t) = -\omega^2 A e^{i\omega t}$, $\ddot{x}_2(t) = -\omega^2 B e^{i\omega t}$, $\ddot{x}_3(t) = -\omega^2 C e^{i\omega t}$, となり, これらを運動方程式に代入して,

$$\begin{cases} -m\omega^2 A &= -kA + kB \\ -M\omega^2 B &= kA - 2kB + kC \\ -m\omega^2 C &= kB - kC \end{cases} \quad (2)$$

となり, 整理すると,

$$\begin{cases} \left(\omega^2 - \frac{k}{m} \right) A + \frac{k}{m} B &= 0 \\ \frac{k}{M} A + \left(\omega^2 - \frac{2k}{M} \right) B + \frac{k}{M} C &= 0 \\ \frac{k}{m} B + \left(\omega^2 - \frac{k}{m} \right) C &= 0 \end{cases} \quad (3)$$

となるので, これを行列の形式にまとめると,

$$\begin{pmatrix} \left(\omega^2 - \frac{k}{m} \right) & \frac{k}{m} & 0 \\ \frac{k}{M} & \left(\omega^2 - \frac{2k}{M} \right) & \frac{k}{M} \\ 0 & \frac{k}{m} & \left(\omega^2 - \frac{k}{m} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

となる． $A = B = C = 0$ ではない，意味のある解をもつためには，行列 M を

$$M = \begin{pmatrix} \left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right) & \frac{k}{m} & \\ \frac{k}{M} & \left(\omega^2 - \frac{2k}{M}\right) & \frac{k}{M} \\ & \frac{k}{m} & \left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right) \end{pmatrix} \quad (5)$$

として $\det M = 0$ でなければならない． (4) 式の行列式を計算すると

$$\begin{aligned} \left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right)^2 \left(\omega^2 - \frac{2k}{M}\right) - 2\left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right) \frac{k^2}{mM} &= 0 \\ \omega^2 \left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right) \left\{ \omega^2 - \left(\frac{k}{m} + \frac{2k}{M}\right) \right\} &= 0 \end{aligned}$$

となり， ω の解のうち， $+$ のみを考えればよく，基準振動の基準角振動数が求められ， $\omega = 0, \sqrt{\frac{k}{m}}, \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{2k}{M}}$ となる．

(5) それぞれの ω の場合について (4) 式に代入して求めれば良い．

i) $\omega = 0$ の場合:

$$A = B = C \text{ となり, } A : B : C = 1 : 1 : 1$$

ii) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ の場合 :

$$B = 0, A = -C \text{ となり, } A : B : C = 1 : 0 : -1$$

iii) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{2k}{M}}$ の場合 :

$$A = -\frac{M}{2m}B, A = C \text{ となり, } A : B : C = 1 : -\frac{2m}{M} : 1$$

(出題意図)

力学分野の基礎学力を問う。

(1),(2) 基本である自由度 1 の単振動について、題意の理解力、基礎方程式の記述能力および解く能力を問うた。

(3)~(5) 自由度 3 の振動運動について、単振動の解の形を与えた上で、基礎方程式の記述能力、連立微分方程式の解答力及び運動状態の理解力を問うた。

以上

[III] 解答

[A]

- (1) 球対称性を考慮する。導体球の中心からの距離を r とする。

領域 A

静電場では導体内部では、電場はゼロである。

(別解) 半径 r ($r < a$) の球面を考え、ガウスの法則を用いる。静電場では、導体内に電荷が存在しないので、

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S E dS = 0.$$

ここで、 S は半径 r の球の表面積、 $\mathbf{n}$ は球面の単位法線ベクトルである。よって、電場は、 $E = 0$ 。

領域 B

$a < r < b$ を満たす半径 r の球面を考える。ガウスの法則より、

$$\int_S E dS = \frac{2Q}{\varepsilon_0}.$$

これから、

$$4\pi r^2 E = \frac{2Q}{\varepsilon_0}.$$

よって、

$$E = \frac{Q}{2\pi r^2}.$$

領域 C

領域 A と同様に、 $E = 0$ 。

領域 D

$r > c$ を満たす半径 r の球面を考える。この球内の電荷は、 $2Q - Q = Q$ である。したがって、ガウスの法則より、

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

よって、電場は、

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

- (2) 球殻内部に電場が存在しないことから、球殻の内表面は半径 a の球が持つ電荷 $2Q$ がつくる電場を打ち消すために、 $-2Q$ である。
- (3) 球殻の内表面の電荷が $-2Q$ 、また球殻の持つ全電荷が $-Q$ であることから、外表面には電荷 Q が存在する。

[B]

(1) 電場の大きさを $E = \phi/d$ として, 運動方程式は,

$$m \frac{dv_x}{dt} = qBv_y, \quad m \frac{dv_y}{dt} = -qBv_x + qE, \quad m \frac{dv_z}{dt} = 0.$$

(2) v_z の方程式と初期条件から, $z = 0$.

v_y の方程式から

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{qB}{m} \left(v_x - \frac{E}{B} \right).$$

ここで, $\tilde{v}_x = v_x - E/B$ とおくと, v_x, v_y についての方程式から,

$$\frac{d\tilde{v}_x}{dt} = \frac{qB}{m} v_y, \quad \frac{dv_y}{dt} = -\frac{qB}{m} \tilde{v}_x.$$

これから, $\omega = qB/m$ として,

$$\frac{d^2\tilde{v}_x}{dt^2} = -\omega^2 \tilde{v}_x, \quad \frac{d^2v_y}{dt^2} = -\omega^2 v_y.$$

これは, 角振動数 ω の単振動の式である. この解は, 初期条件を考慮して,

$$\tilde{v}_x = -\frac{E}{B} \cos \omega t, \quad v_y = \frac{E}{B} \sin \omega t.$$

よって,

$$v_x = \frac{E}{B} (1 - \cos \omega t), \quad v_y = \frac{E}{B} \sin \omega t.$$

これを更に積分し, 初期条件を考慮して,

$$x = \frac{E}{\omega B} (\omega t - \sin \omega t), \quad y = \frac{E}{B\omega B} (1 - \cos \omega t).$$

以上から,

$$x = \frac{m\phi}{qB^2d} \left(\frac{qB}{m} t - \sin \frac{qB}{m} t \right), \quad y = \frac{m\phi}{qB^2d} \left(1 - \cos \frac{qB}{m} t \right), \quad z = 0.$$

(3) y の最大値は $(qB/m)t = \pi$ のとき, $y_{\max} = 2m\phi/qB^2d$. よって粒子が陰極に到達しないための条件は,

$$\frac{2m\phi}{qB^2d} < d.$$

これから, ϕ についての条件は,

$$\phi < \frac{qB^2d^2}{2m}.$$

出題意図

[III] 電磁気

電磁気学の基本的な知識と理解を見る問題である。

[A] 静電場で，ガウスの法則の理解を問う問題である。

[B] 一様な電場と磁場の中を運動する荷電粒子について問う問題である。

[IV] 解答

(1) エネルギー ϵ の状態にある粒子の個数 k は $k = \frac{E}{\epsilon}$.

(2) 求める状態の数 W は

$$W = {}_N C_k = \frac{N!}{(E/\epsilon)![N - (E/\epsilon)]!}.$$

(3) 与えられた近似式を用いて, W は

$$W \approx \frac{N^N}{k^k (N - k)^{N-k}} = \frac{N^N}{(E/\epsilon)^{(E/\epsilon)} [N - (E/\epsilon)]^{N-(E/\epsilon)}}.$$

(4) ボルツマンの原理により, この系のエントロピー S は

$$S = k_B \log W \approx k_B \left[N \log N - \frac{E}{\epsilon} \log \frac{E}{\epsilon} - \left(N - \frac{E}{\epsilon} \right) \log \left(N - \frac{E}{\epsilon} \right) \right].$$

(5) 熱力学第一法則より

$$\frac{1}{T} = \frac{dS}{dE} \approx \frac{k_B}{\epsilon} \log \left(\frac{N\epsilon}{E} - 1 \right)$$

であるから, この系の温度 T は

$$T \approx \frac{\epsilon}{k_B \log \left(\frac{N\epsilon}{E} - 1 \right)}.$$

(6) 小問 (5) の結果から,

$$E \approx \frac{N\epsilon}{e^{\epsilon/(k_B T)} + 1}.$$

これより $\lim_{T \rightarrow +\infty} E = \frac{1}{2} N\epsilon$.

(7) 小問 (6) で求めた E の表式から $\lim_{T \rightarrow +0} E = 0$. これと, 小問 (4) で求めたエントロピー S の表式を用いて $\lim_{T \rightarrow +0} S = \lim_{E \rightarrow +0} S = 0$.

(8) この系の熱容量 C は, 小問 (6) で求めた E を T で表した式を用いて

$$C = \frac{dE}{dT} \approx k_B N \left(\frac{N\epsilon}{E} - 1 \right) \left[\frac{\log \left(\frac{N\epsilon}{E} - 1 \right)}{\frac{N\epsilon}{E}} \right]^2.$$

< 出題の意図 >

ボルツマンの原理を用いて, 熱平衡状態にある系の熱力学的量を求め, 系の巨視的性質を解析する方法について, 二準位系を用いて問う問題である。