関西学院大学大学院理工学研究科
2026 年度入学試験
（一次：2025 年 8 月 1 日実施）

専門科目
物理・宇宙物理学専攻

（11:10-13:10　120 分）

【試験にあたっての注意】

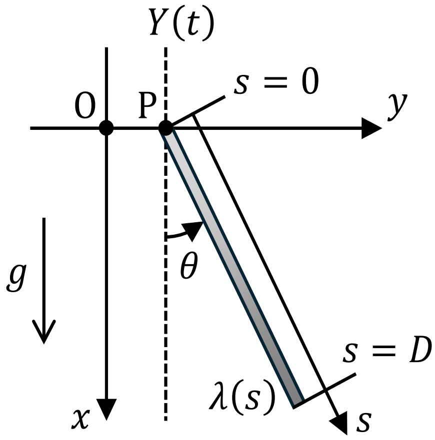
1. 筆記用具以外はカバンに入れ、カバンは床の上に置くこと。
2. 携帯電話、スマートフォン、ウェアラブル端末、音楽プレーヤー等の音の出る機器の電源を切ること。
   なお、アラームを設定している人は解除してから電源を切り、カバンにしまうこと。
3. 時計のアラームは解除すること。携帯電話を時計として使用することは認めない。
4. 試験の途中退出は認めない。ただし、やむを得ない場合は挙手し監督者に知らせること。
5. 不審な言動は慎むこと。不正行為が発覚した場合、全科目を 0 点とする。
6. 試験用紙は以下の構成となっている。
   ①　問題冊子 1 冊
   ②　解答用紙
7. 指示があるまで問題冊子および解答用紙を開かないこと。
8. 解答用紙のホチキスは、はずさないこと（提出時もホチキス留めのまま提出すること）。
9. 各問題は、所定の解答用紙に解答すること。
10. 解答にあたっては、問題冊子および解答用紙に書かれた注意に従うこと。
11. 解答用紙には、氏名は記入せず、受験番号のみを記入すること。
12. 原則、解答用紙の裏面使用は不可。やむを得ず解答欄が不足する場合は＜裏面に続く＞と記載することで、裏面への記載を認める。
13. 試験終了後、問題冊子は各自持ち帰ること。

以上

［物理・宇宙物理学専攻（専門科目）］

次の［Ⅰ］～［Ⅳ］すべてに解答せよ。
なお、解答用紙は大問１題につき１枚使用すること。

[I] 図のように，原点 O で直交する鉛直下向きの x 軸と水平右向きの y 軸からなる二次元平面において，y 軸上の位置に存在する点 P に一端を固定された剛体棒の，点 P を支点とした x-y 面内の回転運動を考える．ここで x 軸の方向と棒がなす角度を θ と定義する．棒の長さは D，棒の太さは無視できるとする．一方で棒の線密度 λ は，棒に平行に定義された s 軸に対し，s に依存する関数 $\lambda(s)$ として与える．また，点 P の y 軸の位置を $y_{\mathrm{P}}(t) = Y(t)$ のように時間 t に依存する関数 $Y(t)$ に従って変化させる．x 軸方向には大きさ g の重力加速度が加わっている．以下の問(1)~(6)に答えよ．



(1) 点 P で $s = 0$，棒の反対の端で $s = D$ とし，棒の線密度を，

$$\lambda(s) = \frac{2ms}{D^2}$$

で与えたとき，以下の(a)~(d)について計算し，定数 m，D のうち必要なものを用いて解答せよ．

(a) 棒の全質量 M

(b) 点 P から重心までの長さ d

(c) 棒の点 P まわりの慣性モーメント I_{P}

(d) 棒の重心まわりの慣性モーメント I_{G}

ここで平行軸の定理 $I_{\mathrm{P}} = I_{\mathrm{G}} + Md^2$ を用いて良い．

以後の解答は，g，M，d，I_{P}，I_{G}，θ，$\dot{\theta}$，$\ddot{\theta}$，Y，$\dot{Y}$，$\ddot{Y}$，t，および，以後の問題文で新たに定義する定数のうち必要なものを用いて記述せよ．必要に応じて積分定数も定義し解答に用いること．
まずは $Y(t) = 0$ の場合を考える．

(2) 点 P まわりの回転に関し，重心に作用するトルクを示せ．

(3) 点 P まわりの回転に関し，$|\theta| \ll 1$ を仮定し，θ の一次までで近似した運動方程式を示し，その微分方程式としての一般解を導出せよ．またここで，固有角振動数 ω を定義し，その式を示せ．

次に $Y(t)$ が変化する場合を考える．このとき，重心に関する並進移動と回転に注目し，以下の手順で解を導け．

(4) $|\theta| \ll 1$ を仮定せずに，棒の運動を記述するラグランジアンを示せ．このとき，棒の重心まわりの回転に関する運動エネルギー T_1，棒の重心の並進移動に関する運動エネルギー T_2，ポテンシャル V が，それぞれどのように与えられるか導出せよ．

(5) オイラー＝ラグランジュ方程式から，θ に関する近似なしの運動方程式を示せ．次に $|\theta| \ll 1$ を仮定し，θ の一次までで近似した運動方程式を示せ．

(6) 定数 Y_0，Ω を用いて，$Y(t) = Y_0 \cos(\Omega t)$ を仮定したとき，θ の一次までで近似した運動方程式について，その微分方程式としての一般解を導出せよ．ただし，(3)で定義した ω に対し，
$\Omega \neq \omega$ とする．

［II］以下の問 A(1)から(3)，B(1)から(2)に答えよ．

A. 図 1 のように，半径 R の導体球が正電荷 Q で帯電し，一定の角速度 ω でゆっくり回転している．

(1) 図 1 の θ から $\theta + \mathrm{d}\theta$（$\mathrm{d}\theta$ は微小角である）に流れる電流の大きさ $\mathrm{d}i$ を Q，ω，θ，$\mathrm{d}\theta$ を用いて表せ．

(2) 磁気モーメントは，電流の大きさと，電流が環状に囲む面の面積の積を大きさとし，電流に対し右ネジの向きのベクトルとして表される．この導体球が作る磁気モーメント $\vec{\mu}$ の大きさを R，Q，ω を用いて表せ．

(3) 図 1 の回転軸上の十分遠方の点 Z での，この導体球による磁場の大きさを，導体球中心から Z までの距離を r とし，ε_0，c，r，R，Q，ω を用いて表せ．磁気モーメントが十分遠方の $\vec{r}$（磁気モーメントからの距離 $r = |\vec{r}|$）に作る磁場 $\vec{B}$ は，ε_0，c を真空の誘電率と光速とし，下記の式で与えられる．

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \qquad \vec{A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\vec{\mu} \times \vec{r}}{r^3}$$

B. 図 2 のように，半径 R の十分薄い導体円盤が中心軸の周りに一定の角速度 ω でゆっくり回転している．この円盤は，円盤の中心軸と角度 α を成す一様一定の磁場 $\vec{B}$（大きさ B）中に置かれている．

(1) 導体円盤の中心 O より半径 r から $r + \mathrm{d}r$（$\mathrm{d}r$ は微小）に生じる誘導起電力の大きさ $\mathrm{d}e$ を B，ω，α，r，$\mathrm{d}r$ を用いて表せ．

(2) この導体円盤全体の誘導起電力 e を B，R，ω，α を用いて表せ．

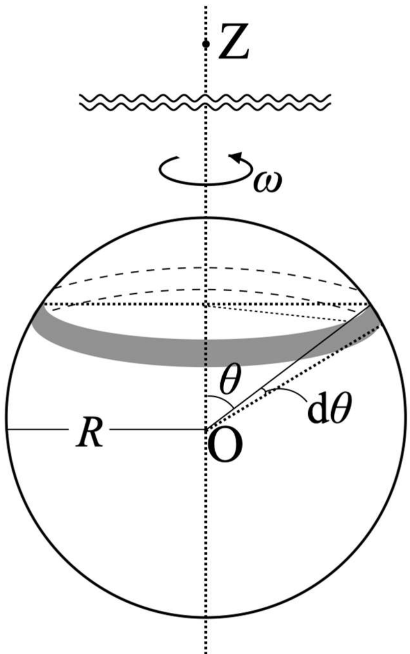


図 1

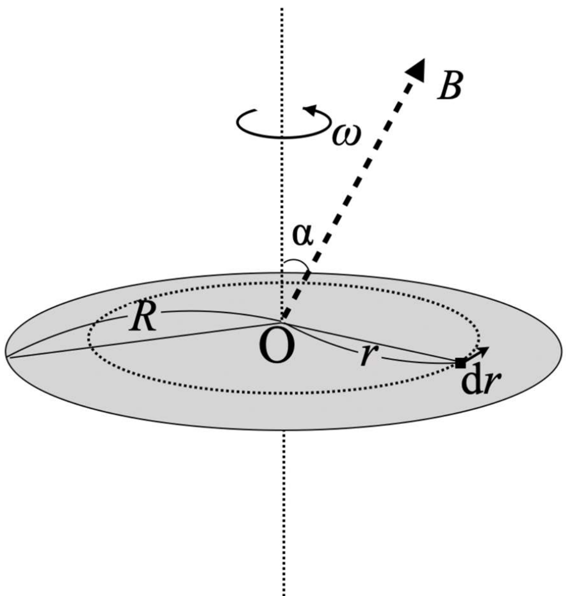


図 2

[III]　温度 T, エントロピー S, 圧力 P, 体積 V, 内部エネルギー E の熱平衡状態にある系の熱力学に関する以下の問 A, B, C に答えよ.

A. (1) 熱力学量の偏微分の間の関係式の一種として, マクスウェルの関係式が知られている. そのうちの2つとして, $\left.\frac{\partial T}{\partial V}\right|_S$ および $\left.\frac{\partial S}{\partial V}\right|_T$ を, $\left.\frac{\partial P}{\partial T}\right|_V$ と $\left.\frac{\partial P}{\partial S}\right|_V$ から適切なものを用いて表せ.

(2) この系のエネルギー密度 $u \equiv \frac{E}{V}$ の値が温度のみで決まる場合を考える. このとき, 熱力学第1法則 $dE = TdS - PdV$ を用いて, u を P, $\left.\frac{\partial P}{\partial T}\right|_V$, T を用いて表せ.

B. この系が質点からなる3次元古典理想気体である場合に, P をエネルギー密度 u を用いて表せ.

C. この系が3次元光子気体である場合を考える. このとき, P は, 温度のみで値が決まるエネルギー密度 u を用いて, $P = \frac{u}{3}$ と表される.

(1) 問 A.(2) で得られた関係式, および, 定数 σ と n を用いて, u は $u = \sigma T^n$ と表されることを示し, n の値を求めよ.

(2) 定積熱容量を求め, σ, T, V を用いて表せ.

(3) 熱力学第1法則および熱力学第3法則(絶対零度におけるエントロピーの値は 0 にとれること)を用いて, エントロピーを求め, σ, T, V を用いて表せ.

(4) 定数 k を用いて, この系における断熱過程では $T^k V$ が一定に保たれることを示し, k の値を求めよ.

［IV］ 1 次元空間内で局在している質量 m の粒子についての以下の問(1)～(7)に答えよ．なお，計算や説明に際して使用する関数はいずれも $|x| \to \infty$ ですみやかに 0 になり，定積分は収束して有限の値になるものと想定して構わない．

演算子 $\hat{\mathrm{A}}$ がエルミート演算子（自己共役演算子）であるならば，任意の関数 $\eta(x)$ および $\varphi(x)$ に対して $\int_{-\infty}^{+\infty} \eta^{*}(\hat{\mathrm{A}}\,\varphi)\,\mathrm{d}\,x = \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{\mathrm{A}}\,\eta)^{*}\varphi\,\mathrm{d}\,x$ が成立する．

(1) エルミート演算子の固有値は実数であることを示せ．

(2) 位置演算子 $\hat{x} = x$，運動量演算子 $\hat{p} = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}$，ハミルトニアン演算子 $\hat{H} = \dfrac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$ がエルミート演算子であることを示せ（$V(x)$ はポテンシャルエネルギー（実関数）である）．

(3) $\hat{\mathrm{A}}$ が物理量 A を表す演算子であるならば，A の平均値（期待値）$\langle \hat{\mathrm{A}} \rangle$ は時間依存するシュレーディンガー方程式の解である規格化された波動関数 Ψ を用いて，$\langle \hat{\mathrm{A}} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^{*}(\hat{\mathrm{A}}\Psi)\,\mathrm{d}\,x$ で与えられる．これより，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\langle \hat{\mathrm{A}} \rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle \hat{\mathrm{A}}\,\hat{H} - \hat{H}\,\hat{\mathrm{A}} \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{\mathrm{A}}}{\partial t} \right\rangle$$ が成立することを示せ．

(4) ポテンシャルエネルギーが位置に依存しないならば，$\langle \hat{p} \rangle$ は時間に依存しないことを示せ．

(5) $\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar$ を示せ．

(6) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\langle \hat{x}^2 \rangle = \dfrac{1}{m}\langle \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x} \rangle$ が成り立つことを示せ．

(7) 状態がエネルギーの固有状態であるならば，$\langle \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x} \rangle = 0$ となることを示せ．

[Ⅰ]力学　解答例

(1) (a) $M=\int_0^D ds\lambda(s)=m,$　　(b) $d=\frac{1}{m}\int_0^D ds\lambda(s)s=\frac{2}{3}D,$　　(c) $I_\mathrm{P}=\int_0^D ds\lambda(s)s^2=\frac{1}{2}mD^2$

(d) 平行軸の定理 $I_\mathrm{P}=I_\mathrm{G}+Md^2$より，$I_\mathrm{G}=I_\mathrm{P}-md^2=\frac{1}{18}mD^2$

(2) トルクをNとすると、$N=-Mgd\sin\theta$

(3) 運動方程式は、$I_\mathrm{P}\ddot{\theta}=N=-Mgd\sin\theta$．$\theta$の一次まで近似して移項すると、$I_\mathrm{P}\ddot{\theta}+Mgd\theta=0$

固有振動数は、$\omega=\sqrt{\frac{Mgd}{I_\mathrm{P}}}$と定義できる。これを用いると運動方程式は、$\ddot{\theta}+\omega^2\theta=0$

一般解は、$\theta=A\cos(\omega t+\alpha)$, ($A,\alpha$は積分定数)

(4) 重心まわりの回転の運動エネルギーは、$T_1=\frac{1}{2}I_\mathrm{G}\dot{\theta}^2,$

並進移動の運動エネルギーは、$T_2=\frac{1}{2}M(\dot{x}^2+\dot{y}^2)=\frac{1}{2}M\left(d^2\dot{\theta}^2+\dot{Y}^2+2d\dot{Y}\dot{\theta}\cos\theta\right)$

ポテンシャルは、$V=-Mgx=-Mgd\cos\theta$

したがって、ラグランジアン L は、$L=T_1+T_2-V=\frac{1}{2}I_\mathrm{P}\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}M\dot{Y}^2+Md\dot{Y}\dot{\theta}\cos\theta+Mgd\cos\theta$

(5) $\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=I_\mathrm{P}\dot{\theta}+Md\dot{Y}\cos\theta$,　　$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)=I_\mathrm{P}\ddot{\theta}+Md\ddot{Y}\cos\theta-Md\dot{Y}\dot{\theta}\sin\theta$

$\frac{\partial L}{\partial\theta}=-Md\dot{Y}\dot{\theta}\sin\theta-Mgd\sin\theta$　より、オイラー＝ラグランジュ方程式は、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=I_\mathrm{P}\ddot{\theta}+Md\ddot{Y}\cos\theta+Mgd\sin\theta=0$$

θの一次までで近似すると、$I_\mathrm{P}\ddot{\theta}+Mgd\theta=-Md\ddot{Y}$，(3)で定義した$\omega$を利用すると、$\ddot{\theta}+\omega^2\theta=-\frac{\omega^2}{g}\ddot{Y}$

(6) $\ddot{\theta}+\omega^2\theta=\frac{\omega^2}{g}Y_0\Omega^2\cos(\Omega t)$　に対し、特解 $\theta_\mathrm{p}=B\cos(\Omega t)$ を想定し代入すると、$B=\frac{Y_0\omega^2\Omega^2}{g(\omega^2-\Omega^2)}$　を得る。

(3)の結果を踏まえて一般解は、

$$\theta=A\cos(\omega t+\alpha)+\frac{Y_0\omega^2\Omega^2}{g(\omega^2-\Omega^2)}\cos(\Omega t),\quad (A,\alpha\text{は積分定数})$$

出題意図　力学に関する基礎的な知識を問う問題である。
(1)各値の定義と単純な積分計算の理解を問う問題である。
(2),(3)回転運動に関する理解を問う問題である。
(4),(5)解析力学に関する基礎的な理解を問う問題である。
(6)微分方程式としての運動方程式の解法の理解を問う問題である。

［II］電磁気学解答例

A. (1) 導体球表面の面電荷密度は $\sigma = Q/4\pi R^2$. θ から $\theta + \mathrm{d}\theta$ にある電荷は電荷密度 σ と円周 $2\pi R\sin\theta$ と円環の幅 $Rd\theta$ の積で表され，円環の 1 秒あたりの回転数は $\omega/2\pi$ なので，θ から $\theta + \mathrm{d}\theta$ に流れる電流の大きさ di は，

$$\mathrm{d}i = \frac{\omega}{2\pi}\sigma \cdot 2\pi R\ sin\theta R\mathrm{d}\theta = \frac{Q\omega}{4\pi}\ sin\theta\mathrm{d}\theta$$

(2) $\mathrm{d}i$ による磁気モーメントの大きさ $\mathrm{d}\mu$ は，

$$\mathrm{d}\mu = \pi(Rsin\theta)^2\mathrm{d}i = \frac{1}{4}\ R^2 Q\omega \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

導体球による磁気モーメントの大きさは，

$$\mu = \frac{1}{4}\ R^2 Q\omega \int_0^{\pi} \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\ R^2 Q\omega \int_0^{\pi} (1 - \cos^2\theta)\sin\theta \mathrm{d}\theta\,.$$

$t = \cos\theta$ とすると，

$$\mu = \frac{1}{4}\ R^2 Q\ \omega \int_{-1}^{1} (1 - t^2)\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\ R^2 Q\omega.$$

(3) 図の回転軸方向を z 軸にとり，$(x, y, z) = (0,0,0)$ の点に磁気モーメントがあるとする．

磁気モーメントの式より，

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left(-\frac{\mu y}{r^3}, \frac{\mu x}{r^3}, 0\right),$$

$$B_x = \frac{\mu}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{3zx}{r^5}, B_y = \frac{\mu}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{3zy}{r^5}, B_z = -\ \frac{\mu}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}\right).$$

$Z = (r, 0, 0)$（r は磁気モーメントから十分遠方）では，$\vec{B} = (0,0,\mu/2\pi\varepsilon_0 c^2 r^3)$.

(2)で求めた μ の値を代入し，

$$\left|\vec{B}\right| = B_z = \frac{R^2 Q\omega}{6\pi\varepsilon_0 c^2 r^3}.$$

B. (1) 半径 r に，動径方向の向きを持つ線素片 $\mathrm{d}\vec{r}$（$|d\vec{r}| = dr$）を考える．$\mathrm{d}\vec{r}$ の速度 $\vec{v}$ の大きさは $v = r\omega$. 半径 r から $r + \mathrm{d}r$ に生じる誘導起電力は，

$$\mathrm{d}e = \left(\vec{v}\ \times \vec{B}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = r\omega B \cos\alpha\,\mathrm{d}r.$$

(2) (1)を積分し，円盤全体の誘導起電力は，

$$e = \int_0^R r\omega B \cos\alpha\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\ B\omega R^2\ \cos\alpha.$$

出題意図

［II］電磁気学の基本的な知識と理解について，電流や磁場，磁気モーメント，電磁誘導の計算を通じて問う問題である．

[III]　解答

A.

(1)　この系のヘルムホルツの自由エネルギーを F とすると，関係式 $dE = TdS - PdV$ および

$dF = -SdT - PdV$ より

$$\left.\frac{\partial T}{\partial V}\right|_S = \frac{\partial^2 E}{\partial V \partial S} = -\left.\frac{\partial P}{\partial S}\right|_V, \qquad \left.\frac{\partial S}{\partial V}\right|_T = -\frac{\partial^2 F}{\partial V \partial T} = \left.\frac{\partial P}{\partial T}\right|_V$$

が得られる.

(2)　関係式 $E = uV$，熱力学第1法則 $dE = TdS - PdV$，および前小問 A.(1) の結果から

$$u = \left.\frac{\partial E}{\partial V}\right|_T = T\left.\frac{\partial S}{\partial V}\right|_T - P = T\left.\frac{\partial P}{\partial T}\right|_V - P$$

が得られる.

B.　系の粒子数を N，ボルツマン定数を k_B とすると，質点からなる古典理想気体の場合，$E = \frac{3}{2}Nk_BT$

かつ $PV = Nk_BT$ であるから

$$P = \frac{2E}{3V} = \frac{2u}{3}$$

が得られる.

C.

(1)　前小問 A.(2) の結果，および u が V に依存しないことから，

$$u = \frac{T}{3}\left.\frac{\partial u}{\partial T}\right|_V - \frac{u}{3} = \frac{T}{3}\frac{du}{dT} - \frac{u}{3}$$

すなわち $\frac{du}{dT} = \frac{4}{T}u$ が得られる. この微分方程式から，定数 σ を用いて，u は $u = \sigma T^4$ と表される. よって $n = 4$ となる.

(2)　前小問 C.(1) の結果を用いて，この系の定積熱容量 C_V は

$$C_V = \left.\frac{\partial E}{\partial T}\right|_V = \left.\frac{\partial u}{\partial T}\right|_V V = 4\sigma T^3 V$$

と表される．

(3)　熱力学第1法則 $dE = TdS - PdV$ と前小問 C.(1) の結果を用いて

$$dS = \frac{dE + PdV}{T} = \frac{V}{T}du + \frac{4u}{3T}dV = 4\sigma T^2 V dT + \frac{4\sigma T^3}{3}dV = d\left(\frac{4}{3}\sigma T^3 V\right)$$

が成り立つ．これと，熱力学第 3 法則 $\lim_{T\to+0} S = 0$ から $S = \frac{4}{3}\sigma T^3 V$ が得られる．

別解：dS は全微分だから，絶対零度 0 から T まで変化されるときのエントロピーの変化はその方法によらない．したがって，エントロピーを絶対零度 0 から T まで V を一定にして変化させることにより

$$S = \lim_{T\to+0} S + \int_0^T dT \left.\frac{\partial E}{\partial T}\right|_V \frac{1}{T} = \int_0^T dT\ \frac{C_V}{T} = \frac{4}{3}\sigma T^3 V$$

が得られる．ここで，前小問 C.(2) の結果を用いた．

(4)　断熱過程では系のエントロピーが一定に保たれること，および前小問 C.(3) の結果を用いると，断熱過程において $T^3 V$ が一定に保たれることが示される．よって $k = 3$ となる．

出題意図

圧力のエネルギー密度依存性に基づいて、光子気体の熱力学的特性を問う問題である。

［IV］量子力学　解答例

(1)　$\hat{\mathrm{A}}$がエルミート演算子であるならば，$\hat{\mathrm{A}}\phi_a = a\times\phi_a$なる固有関数を用いて$\eta=\varphi=\phi_a$とおき，

$\int_{-\infty}^{+\infty}\eta^*(\hat{\mathrm{A}}\varphi)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}(\hat{\mathrm{A}}\eta)^*\varphi\,\mathrm{d}x$に代入することで，$a\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_a{}^*\phi_a\,\mathrm{d}x=a^*\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_a{}^*\phi_a\,\mathrm{d}x$を得る．
よって$a=a^*$．

(2)　$\hat{x}=x$が実数であることより，$\hat{x}$がエルミート演算子であることを示すことができる（証明略）．$\hat{p}$については，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\eta^*(\hat{p}\varphi)\,\mathrm{d}x=-i\hbar\int_{-\infty}^{+\infty}\eta^*(\frac{\partial}{\partial x}\varphi)\,\mathrm{d}x=-i\hbar\left[\left[\eta^*\varphi\right]_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}(\frac{\partial}{\partial x}\eta^*)\varphi\,\mathrm{d}x\right]$$
$$=0+\int_{-\infty}^{+\infty}(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\eta)^*\varphi\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}(\hat{p}\eta)^*\varphi\,\mathrm{d}x.$$

$\hat{H}$については，エルミート演算子の和がエルミート演算子であること，$\hat{p}^2$がエルミート演算子であること，$V(\hat{x})$がここで用いている表示では実関数であることを用いて示すことができる（証明略）．

(3)　$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle\hat{\mathrm{A}}\right\rangle=-\int_{-\infty}^{+\infty}(i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t})^*(\hat{\mathrm{A}}\Psi)\,\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^*(\hat{\mathrm{A}}(i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}))\,\mathrm{d}x+i\hbar\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^*(\frac{\partial\hat{\mathrm{A}}}{\partial t}\Psi)\,\mathrm{d}x$および

$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\hat{H}\Psi$を用いて，$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle\hat{\mathrm{A}}\right\rangle=-\int_{-\infty}^{+\infty}(\hat{H}\Psi)^*(\hat{\mathrm{A}}\Psi)\,\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^*(\hat{\mathrm{A}}\hat{H}\Psi)\,\mathrm{d}x+i\hbar\left\langle\frac{\partial\hat{\mathrm{A}}}{\partial t}\right\rangle$と

なるが，$\hat{H}$がエルミート演算子であることを用いて，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle\hat{\mathrm{A}}\right\rangle=\frac{1}{i\hbar}\left\langle\hat{\mathrm{A}}\hat{H}-\hat{H}\hat{\mathrm{A}}\right\rangle+\left\langle\frac{\partial\hat{\mathrm{A}}}{\partial t}\right\rangle$ が

得られる．

(4)　$V(\hat{x})=$定数 として，(3)で求めた式より$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle\hat{p}\right\rangle=0$が得られる（計算略）．

(5)　$(\hat{x}\hat{p}-\hat{p}\hat{x})f(x)=-i\hbar(x\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial xf}{\partial x})=i\hbar f(x)$ より $\hat{x}\hat{p}-\hat{p}\hat{x}=i\hbar$．

(6)　$i\hbar\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle\hat{x}^2\right\rangle=\left\langle\hat{x}^2\hat{H}-\hat{H}\hat{x}^2\right\rangle=\dfrac{1}{2m}\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^*((\hat{x}^2\hat{p}^2-\hat{p}^2\hat{x}^2)\Psi)\,\mathrm{d}x$ であるが，(5) で示した $\hat{x}\hat{p}-\hat{p}\hat{x}=i\hbar$ を用いることで，$\hat{x}^2\hat{p}^2-\hat{p}^2\hat{x}^2=2i\hbar(\hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x})$ が得られるため，上式は $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle\hat{x}^2\right\rangle=\dfrac{1}{m}\left\langle\hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x}\right\rangle$ となる．

(7)　(6) で $\left\langle\hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x}\right\rangle=m\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle\hat{x}^2\right\rangle$ を示したが，$\hat{H}\phi_E=E\times\phi_E$ と (3) で求めた式を用いることで

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle\hat{x}^2\right\rangle&=\frac{m}{i\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_E{}^*((x^2\hat{H}-\hat{H}x^2)\phi_E)\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{m}{i\hbar}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_E{}^*(x^2\hat{H}\phi_E)\,\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{+\infty}(\hat{H}\phi_E)^*(x^2\phi_E)\,\mathrm{d}x\right]\\
&=\frac{m}{i\hbar}\left[E\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_E{}^*x^2\phi_E\,\mathrm{d}x-E^*\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_E{}^*x^2\phi_E\,\mathrm{d}x\right]=0\,.
\end{aligned}
$$

出題意図

量子力学の理論的な枠組みに対する理解度, 特に演算子と測定値（期待値）との関連に対する論証能力を問うた.