

関西学院大学大学院理工学研究科

2026 年度入学試験

(二次：2026 年 2 月 26 日実施)

専門科目

先進エネルギーナノ工学専攻

(11:10-13:10 120 分)

【試験にあたっての注意】

1. 筆記用具以外はカバンに入れ、カバンは床の上に置くこと。
2. 携帯電話、スマートフォン、ウェアラブル端末、音楽プレーヤー等の音の出る機器の電源を切ること。
なお、アラームを設定している人は解除してから電源を切り、カバンにしまうこと。
3. 時計のアラームは解除すること。携帯電話を時計として使用することは認めない。
4. 試験の途中退場は認めない。ただし、やむを得ない場合は挙手し監督者に知らせること。
5. 不審な言動は慎むこと。不正行為が発覚した場合、全科目を 0 点とする。
6. 試験用紙は以下の構成となっている。
 - ① 問題冊子 1 冊
 - ② 選択問題調査書、解答用紙
7. 指示があるまで問題冊子および解答用紙を開かないこと。
8. 解答用紙のホチキスは、はずさないこと（提出時もホチキス留めのまま提出すること）。
9. 各問題は、所定の解答用紙に解答すること。
10. 解答にあたっては、問題冊子および解答用紙に書かれた注意に従うこと。
11. 解答用紙には、氏名は記入せず、受験番号のみを記入すること。
12. 原則、解答用紙の裏面使用は不可。やむを得ず解答欄が不足する場合は「<裏面に続く>」と記載することで、裏面への記載を認める。
13. 試験終了後、問題冊子は各自持ち帰ること。

以上

[先進エネルギー—ナノ工学専攻（専門科目）] 解答にあたって

1. 専門科目の問題 [I] は必須問題であるので、必ず解答せよ.
2. 続く専門科目（[II] 数学, [III] 化学, [IV] 電磁気, [V] 電気回路, [VI] 熱力学, [VII] 量子力学, [VIII] 固体物性）の 7 題から 3 題を選択して解答せよ.
ただし、指導を希望する教員が電気電子応用工学課程に所属している場合、数学と電磁気に加え、電気回路もしくは固体物性のどちらか 1 題を必ず解答すること.
3. 解答用紙および添付された選択科目調査書に、選択した問題番号など必要事項を記入すること.
4. 解答用紙は大問 1 題につき 1 枚使用すること.

[I] 卒業研究・大学院入試後の研究計画（必須問題）

あなたが取り組んだ卒業研究（大学４年生の時の研究）について，その研究テーマ名，目的，結果，考察，今後の課題とその対応などを簡潔に記しなさい．なお，卒業研究を実施しなかった者は，大学院に入学してからの研究計画を述べなさい．

[Ⅱ] 数学

以下の問1から問3に答えよ.

問1. 行列 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ のとき, 以下の小問(1)から小問(3)に答えよ.

- (1) 行列 \mathbf{A} の固有値を求めよ.
- (2) 小問(1)で求めた行列 \mathbf{A} の固有値に対する固有ベクトルを求めよ.
- (3) 行列 \mathbf{A} を対角化できるか. 対角化できる場合は行列 \mathbf{A} を対角化せよ.

問2. 行列 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, 以下の小問(1)から小問(3)に答えよ.

- (1) 行列 \mathbf{B} の固有値を求めよ.
- (2) 小問(1)で求めた行列 \mathbf{B} の固有値に対する固有ベクトルを求めよ.
- (3) 行列 \mathbf{B} を対角化できるか. 対角化できる場合は行列 \mathbf{B} を対角化せよ.

問3. 図1に示す2次元空間に関する以下の小問(1)から小問(7)に答えよ.

- (1) 直交座標系(デカルト座標系)の座標 (x_1, y_1) を極座標系の座標 r_1, θ_1 を用いて表せ.(極座標系から直交座標系への変数変換式を示せ.)
- (2) 極座標系から直交座標系への変数変換(座標変換)に伴うヤコビ行列式(ヤコビアン)を計算せよ.
- (3) 小問(1)の座標 (x_1, y_1) から反時計回りに $\Delta\theta$ 回転した座標 (x_2, y_2) を $r_1, \theta_1, \Delta\theta$ を用いて表せ.
- (4) 小問(1)の座標 (x_1, y_1) から反時計回りに $\Delta\theta$ 回転した座標 (x_2, y_2) を $x_1, y_1, \Delta\theta$ を用いて表せ.
- (5) 座標 (x_1, y_1) から座標 (x_2, y_2) への回転行列 \mathbf{R}_θ を $\Delta\theta$ を用いて表せ.
- (6) 回転行列 \mathbf{R}_θ に実数の固有値があるか論ぜよ.
- (7) 座標 (x_1, y_1) から座標 (x_2, y_2) への回転は, 座標 (x_1, y_1) をそのままにして, 座標軸を $-\Delta\theta$ 回転したと考えることもできる. この変数変換(座標変換)に伴うヤコビ行列式(ヤコビアン)を計算せよ.

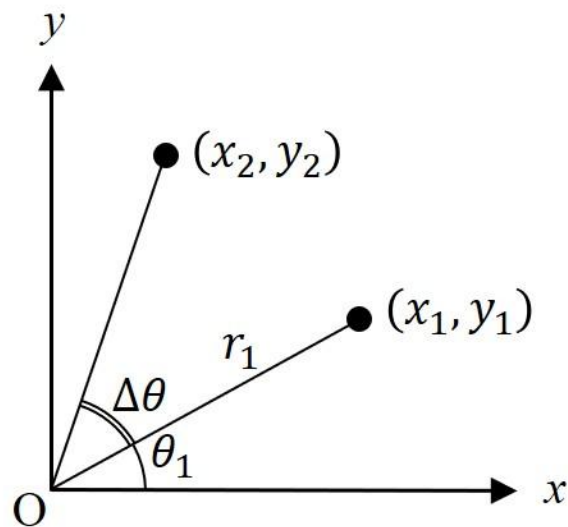


図1

[Ⅱ] 数学 解答

宿題意図

大学で学ぶ線形代数学に関して基本的な問題が解けるかを問う。

解答例

問 1.

(1) $(7 - \lambda)(2 - \lambda) - 1 \times 6 = \lambda^2 - 9\lambda + 8 = (\lambda - 1)(\lambda - 8) = 0$ より固有値は, 1, 8.

(2) 固有値 1 に対して, $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ より, 固有ベクトルは $s \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$,

固有値 8 に対して, $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ より, 固有ベクトルは $t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ここで s, t は任意定数である.

(3) $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$ とすると, $\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ より,

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

問 2.

(1) $(7 - \lambda)(1 - \lambda) - (-3) \times 3 = \lambda^2 - 8\lambda + 16 = (\lambda - 4)^2 = 0$ より固有値は, 重複度 2 の固有値 4.

(2) 固有値 4 に対して, $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ より, 固有ベクトルは $s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

ここで s は任意定数である.

(3) 2次正方行列で重複度 2 なので対角化できない.

問 3.

(1) $x_1 = r_1 \cos \theta_1, y_1 = r_1 \sin \theta_1$

(2) $\begin{vmatrix} \cos \theta_1 & -r_1 \sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & r_1 \cos \theta_1 \end{vmatrix} = r_1$

(3) $x_2 = r_1 \cos(\theta_1 + \Delta\theta), y_2 = r_1 \sin(\theta_1 + \Delta\theta)$

(4) $x_2 = x_1 \cos \Delta\theta - y_1 \sin \Delta\theta, y_2 = x_1 \sin \Delta\theta + y_1 \cos \Delta\theta$

(5) $\begin{pmatrix} \cos(\Delta\theta) & -\sin(\Delta\theta) \\ \sin(\Delta\theta) & \cos(\Delta\theta) \end{pmatrix}$

(6) 固有値方程式に実数の一般解が無いので, 例外を除いて実数の固有値は無いが, $\Delta\theta = 0$ のとき固有値 1, $\Delta\theta = \pi$ のとき固有値 -1 である。

(7) $\begin{vmatrix} \cos(-\Delta\theta) & -\sin(-\Delta\theta) \\ \sin(-\Delta\theta) & \cos(-\Delta\theta) \end{vmatrix} = 1$

[Ⅲ] 化学

以下の問1から問3に答えよ。

問1. 以下の問に答えよ。

- (1) sp 混成軌道, sp^2 混成軌道, sp^3 混成軌道について説明せよ。必要であれば, 図を用いてよい。
- (2) メタン, アンモニア, 水分子の各中心原子 (それぞれ炭素, 窒素, 酸素原子) の混成軌道状態について述べるとともに, それぞれの分子構造を述べよ。必要であれば, 図を用いてよい。
- (3) π 結合および σ 結合について説明せよ。必要であれば, 図を用いてよい。
- (4) ベンゼンを構成する炭素原子の電子状態について混成軌道の観点から述べよ。必要であれば, 図を用いてよい。
- (5) アセチレン, エチレン, エタンにおける炭素原子の混成軌道状態について説明するとともに, 各分子における炭素原子間の距離の大小について長い分子から順に並べて書け。また, その理由についても述べよ。必要であれば, 図を用いてよい。
- (6) BCl_3 および AlH_3 分子について, ホウ素及びアルミニウム原子の混成軌道状態について明記しながら, それぞれの分子構造を述べよ。必要であれば, 図を用いてよい。
- (7) $[Co(NH_3)_6]^{3+}$ において, アンモニア分子と Co^{3+} イオン間の結合の種類について以下より選ぶとともに, その結合について説明せよ。

配位結合 共有結合 イオン結合 金属結合 水素結合

問2. 以下の問に答えよ。

- (1) 水の電気分解により水素と酸素を製造する電解槽がある。
 - (ア) いま, 電解槽の液性がアルカリ性であるとして, カソードおよびアノードの反応式を書け。
 - (イ) 250 g の水を 12 時間で分解するには, 電解槽に何 A の定電流を通過させる必要があるか。ただし, 水の分子量を 18.0, ファラデー定数を 96500 C/mol とする。
- (2) 次の用語について, 式などを用いて説明せよ。
 - (ア) 酸化還元反応におけるネルンストの式
 - (イ) 交換電流密度

問3. 下記に示すような N_2O_4 の分解反応の 298 K, 1 bar^(註1)における圧平衡定数が 0.25 bar であるとする.



以下の間に有効数字 2 桁で答えよ.

- (1) N_2O_4 の分解反応のギブス自由エネルギー変化を求めよ. ただし, 圧平衡定数は圧力の単位を持つが, 今は標準状態であるため, 反応ギブス自由エネルギーと関連付けられる熱力学的平衡定数 (無次元) も同じ値をとると考えてよいものとする. また, 気体定数 R は $8.31 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ とし, $\ln 4 = 1.39$ を用いてよい.
- (2) N_2O_4 の分解反応の 298 K, 1 bar における平衡転化率を求めよ. ただし, 最初は N_2O_4 のみが存在しているものとする. このような流れのない場合 (閉鎖系) においては, 転化率は (反応量 / 初期量) で定義される. また, この反応は圧力変化を伴う反応であるが, 平衡到達後の全圧が 1 bar になるとして考えよ. $\sqrt{17} = 4.12$ を用いてよい.

(註 1) bar は圧力の単位. 0.1 MPa に等しい.

[Ⅲ] 化学 解答

出題意図

基礎化学，電気化学，反応速度論に関する基礎的知識を問うた。

解答例

問1.

(1) 図は省略。

sp^3 : 1つのs軌道と3つのp軌道による混成

sp^2 : 1つのs軌道と2つのp軌道による混成

sp : 1つのs軌道と1つのp軌道による混成

(2)

メタン： sp^3 混成軌道 正四面体，アンモニア： sp^3 混成軌道 三角錐，水： sp^3 混成軌道 折れ線

(3) 図は省略

σ 結合：結合軸方向を向いた原子軌道同士による結合である。

π 結合：分子内の隣り合った原子同士の電子軌道のローブの重なりによってできる化学結合である。

(4) 図は省略。 sp^2 混成軌道

(5) 図や理由は省略。

エタン： sp^3 混成軌道，エチレン： sp^2 混成軌道，アセチレン： sp 混成軌道

エタンのC-C> エチレンのC-C> アセチレンのC-C

(6)

BCl_3 ： sp^2 混成軌道 正三角形， AlI_3 ： sp^2 混成軌道 正三角形

(7)

配位結合：結合を形成する二つの原子の一方からのみ結合電子が分子軌道に提供される化学結合である。

問2.

(1)

(ア)

カソード： $2H^+ + 2e^- \rightarrow H_2$

アノード： $2OH^- \rightarrow H_2O + 1/2O_2 + 2e^-$

(イ)

電流値を I (A) とすると， $I \times (12 \times 3600) = 2 \times (250/18) \times 96500$ より，

$I = 62.0$ (A)

(2)

(ア)

酸化体 Ox と還元体 Red の間の電子授受平衡反応を考える。

このとき、系に挿入された不活性電極の持つ電位（電極電位） E は、平衡時には以下の式で記述され、これを酸化還元反応におけるネルンストの式という。

$$E = E^\circ + \frac{RT}{zF} \ln \frac{a_{\text{Ox}}}{a_{\text{Red}}}$$

E° : 標準電極電位

R : 気体定数

T : 温度(K)

z : 移動電子数

a : 還元側および酸化側の活量

F : ファラデー定数

(イ)

交換電流密度は、電極反応が動的平衡状態にある際に、アノード電流（酸化方向の電流）とカソード電流（還元方向の電流）の大きさが等しく、正味の電流がゼロであるにもかかわらず、電極と電解液の間で電子がやり取りされている状態の電流密度。

問3.

(1) 反応ギブス自由エネルギー $-\Delta G_r^\circ = -RT \ln K$ より、

$$-8.31 \times 298 \times \ln(1/4) = 3.44 \times 10^3 \text{ J/mol} \quad \text{答: } \underline{3.4 \text{ kJ/mol}} \quad (\text{もしくは } \underline{3.4 \times 10^3 \text{ J/mol}})$$

(2) 平衡転化率を X 、最初の N_2O_4 を y mol とすると、 N_2O_4 は Xy mol 反応し（消費され）、 NO_2 は $2Xy$ mol 生成されることになり、全体で $(1+X)y$ mol となる。よって、平衡後の全圧を P bar とすると、

$$P_{\text{N}_2\text{O}_4} = \frac{1-X}{1+X}P, \quad P_{\text{NO}_2} = \frac{2X}{1+X}P$$
$$K_P = \frac{P_{\text{NO}_2}^2}{P_{\text{N}_2\text{O}_4}} = \frac{\left(\frac{2X}{1+X}P\right)^2}{\frac{1-X}{1+X}P} = \frac{4X^2}{(1+X)(1-X)}P$$

$P = 1 \text{ bar}$, 298 K において $K_P = 0.25 \text{ bar}$ より、 $(1-X^2) \times 0.25 = 4X^2$

$$X^2 = \frac{0.25}{4.25} = \frac{1}{17} \quad \therefore X = \frac{1}{4.12} = 0.243 \quad \text{答: } \underline{0.24}$$

[IV] 電磁気

以下の問1と問2に答えよ。

問1. 図1(a)に示すように、極板面積 S の平行板コンデンサーに2種類の誘電体（それぞれ誘電率 ϵ_1, ϵ_2 , 厚さ d_1, d_2 ）が隙間なく挿入されている。同図のように x 軸をとり、電圧 V_0 が印加された。以下の問に答えよ。ただし、極板間に生じる電場は、各誘電体の占める空間において、それぞれ一様であるものとする。

- (1) 各誘電体部分（誘電率 ϵ_1, ϵ_2 , 厚さ d_1, d_2 ）における静電容量 C_1, C_2 をそれぞれ求めよ。さらに、平行板コンデンサーの静電容量 C を求めよ。
- (2) 平行板に生じる電荷 Q , 電荷面密度 σ を求めよ。
- (3) 誘電率 ϵ_1 の範囲($0 < x < d_1$)と誘電率 ϵ_2 の範囲($d_1 < x < d_1 + d_2$)において、それぞれの電場の大きさ E_1, E_2 を求めよ。
- (4) 誘電率 ϵ_1 の範囲($0 < x < d_1$)と誘電率 ϵ_2 の範囲($d_1 < x < d_1 + d_2$)において、それぞれ任意の点 P_1 および P_2 における電位 $V_1(x), V_2(x)$ をそれぞれ求めよ。
- (5) 図1(a)の平行板コンデンサーから2種類の誘電体を取り除き、その境界面のあった位置に帯電した金属箔を挿入した（図1(b)）。このとき、帯電金属箔の電荷面密度を σ' とすると、挿入後の電荷面密度は金属箔の両面で $+\sigma_1$ と $-\sigma_2$ ($\sigma' = \sigma_1 - \sigma_2$)に分かれた。2種類の誘電体を取り除いた後の誘電率をどちらも ϵ_0 とすると、各誘電体のあった空間の電位が問(4)で求めた電位とそれぞれ同じになるために必要な σ' を求めよ。

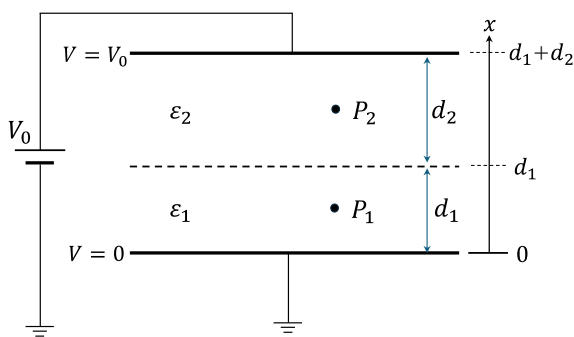


図1(a)

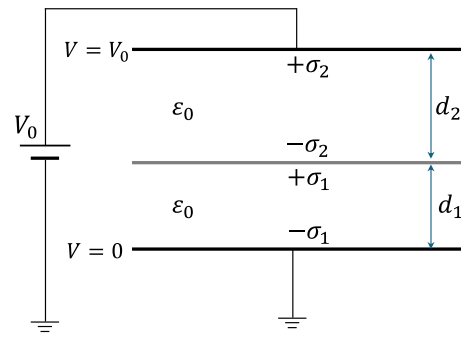


図1(b)

問2. 電荷と電流が存在しない真空中の3次元空間（直交座標系 (x, y, z) ）において電磁波の伝搬を考える．真空の誘電率と透磁率をそれぞれ ϵ_0 と μ_0 として，次の問に答えよ．

- (1) 電場 \vec{E} ，磁束密度 \vec{B} を用いて微分形のマクスウェルの方程式を答えよ．
- (2) 問(1)で答えたマクスウェルの方程式より，電場 \vec{E} ，磁束密度 \vec{B} に関する波動方程式((1)式，(2)式)を導出せよ．ただし，必要であれば任意のベクトル場 \vec{A} に対する公式 $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$ を用いてもよい．

$$\nabla^2 \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (2)$$

- (3) 時刻 t における，波数 k ，角周波数 ω の電磁波の磁束密度 \vec{B} が， $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z) = (0, 0, B_0 \cos(ky + \omega t))$ と与えられるとき，(2)式へ代入することにより，電磁波の伝搬速度を， ϵ_0, μ_0 を用いて表せ．
- (4) 問(3)の磁束密度 \vec{B} に対する電場 $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ を求めよ．さらに，磁束密度 \vec{B} と電場 \vec{E} の大きさの比 ($= |\vec{B}|/|\vec{E}|$) を求めよ．
- (5) 問(3)，(4)の磁束密度および電場からなる電磁波は，時間とともにどちらの方向へ伝搬するか答えよ．また，磁束密度，電場の振動方向をそれぞれ答えよ．

[IV] 電磁気 解答

出題意図

大学で学ぶ電磁気学に関して、基本的な問題が解けるかを問う。

解答例

問1.

$$(1) C_1 = \frac{\varepsilon_1 S}{d_1}, \quad C_2 = \frac{\varepsilon_2 S}{d_2}, \quad C = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2} S$$

$$(2) Q = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 S}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2} V_0, \quad \sigma = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2} V_0$$

$$(3) E_1 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2} V_0, \quad E_2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2} V_0$$

$$(4) V_1(x) = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2} V_0 x, \quad V_2(x) = \frac{\varepsilon_1 x + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) d_1}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2} V_0$$

$$(5) \sigma' = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2} V_0$$

問2.

$$(1) \operatorname{rot} \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$(2) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{E}$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{E}$$

$$-\nabla^2 \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad \text{※}\vec{E} \text{も同様}$$

$$(3) \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

$$(4) \quad \vec{E} = \left(\frac{kB_0}{\varepsilon_0\mu_0\omega} \cos(ky + \omega t), 0, 0 \right)$$

$$\frac{|\vec{B}|}{|\vec{E}|} = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$$

(5) 電磁波の伝播方向は、y 軸負方向.

磁束密度の振動方向は、z 軸方向.

電場の振動方向は、x 軸方向.

[V] 電気回路

以下の問1から問3に答えよ。

問1. 図1に示す回路について以下の問に答えよ。ここで周波数を f ，角周波数を ω とする。

- (1) スイッチ S が開いているときの端子 a - b 間の合成インピーダンス Z_1 を答えよ。
- (2) インピーダンス Z_1 の絶対値が最小となるための周波数 f の条件を求めよ。
- (3) スイッチ S が閉じているときの端子 a - b 間の合成インピーダンス Z_2 を答えよ。
- (4) インピーダンス Z_2 の絶対値が最小となるためのコンデンサ C の条件を求めよ。

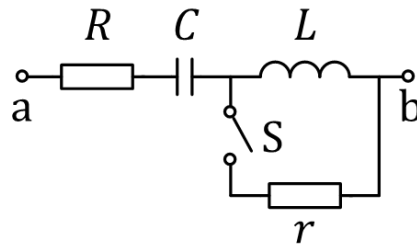


図1

問2. 図2に示す直流回路について考える. インダクタ L の初期電流はゼロであり, 時刻 $t < 0$ ではスイッチ S は開いているとする. $t = 0$ でスイッチ S を閉じた. 以下の間に答えよ.

- (1) $t \geq 0$ で電流 $i(t)$ が満たす微分方程式を求めよ.
- (2) $t \geq 0$ での電流 $i(t)$ を求めよ.
- (3) 電流 $i(t)$ の概形を図示せよ. 図中の縦軸に, 十分時間が経過したときの定常値を記すこと.

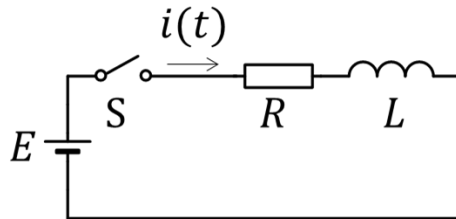


図2

問3. 図3に示す直流回路について考える. インダクタ L の初期電流はゼロ, コンデンサ C の初期電圧はゼロであり, 時刻 $t < 0$ ではスイッチ S は開いているとする. $t = 0$ でスイッチ S を閉じた. 以下の間に答えよ.

- (1) $t \geq 0$ で電圧 $v(t)$ が満たす微分方程式を求めよ.
- (2) $t \geq 0$ での電流 $i(t)$ を求めよ. ただし $R^2 = \frac{4L}{C}$ の関係が成り立つとする.

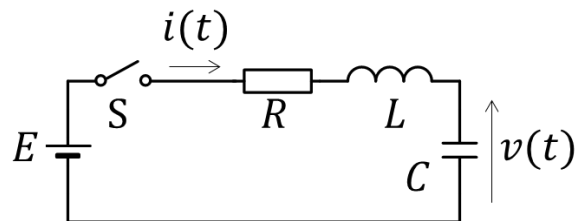


図3

[V] 電気回路 解答

出題意図

交流回路，過渡解析に関する基本事項の理解を問う。

解答例

問4.

$$(1) R + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L$$

$$(2) f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$(3) R + \frac{1}{j\omega C} + \frac{j\omega Lr}{j\omega L + r}$$

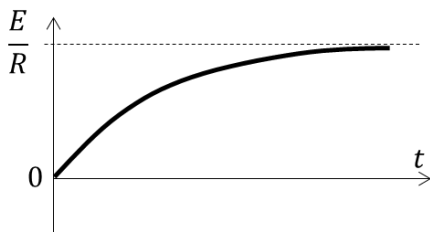
$$(4) C = \frac{r^2 + \omega^2 L^2}{\omega^2 L r^2}$$

問5.

$$(1) E = iR + L \frac{di}{dt}$$

$$(2) i(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

(3)



問6.

$$(1) E = LC \frac{d^2v}{dt^2} + RC \frac{dv}{dt} + v$$

$$(2) i(t) = \frac{E}{L} t e^{-\frac{1}{\sqrt{LC}}t}$$

[VI] 熱力学

以下の問1および問2に答えよ。

問1. カルノーサイクル（理想的なエンジン）の熱効率について考えてみよう。

- (1) 1サイクルの過程で温度 T_A の高温熱浴 A から Q_A の熱を吸収し、温度 T_B の低温熱浴 B に Q_B の熱を放出するエンジンを考える。この過程でエンジンが外部に対してなす仕事 W を求めよ。ここで、熱浴とは熱容量が無限大な系を意味するものとする。
- (2) 問(1)の条件において、各熱浴 A, B におけるエントロピー変化分 ΔS_A および ΔS_B を求めよ。また、エンジンが理想的なエンジンの場合には $\Delta S_A + \Delta S_B = 0$ となる。（ここで、理想的なエンジンとは、1サイクルの過程がエンジンと熱源の双方にとって準静的過程であること、熱源と接触しているときエンジンの温度は熱源と等しいことを意味する。）このとき、理想的なエンジンの効率 W/Q_A が熱浴の温度のみによって表されることを示せ。
- (3) 熱浴 A ではなく、熱容量 C 、温度 T の高温物体 D と温度 T_B の低温熱浴 B（ただし、 $T > T_B$ ）との間で、熱をやりとりして熱を仕事に変換する理想的なエンジンがある。エンジンが1サイクルの運転で、物体 D の温度が T から $T + \Delta T$ へ微小変化するとき、 ΔT の符号に注意して、この理想的なエンジンが1サイクルで外部になしうる仕事 ΔW を求めよ。ただし、物体 D の熱容量は温度によらないとする。
- (4) 問(3)の条件において、物体 D の最初の温度を T_A とし、物体 D の温度が熱浴 B の温度 T_B と等しくなるまでエンジンは外部に仕事をするができるとする。物体 D の温度が T_B となるまでにこのエンジンが外部になす仕事の総量を求めよ。

問2. 分配関数と熱力学関数との関係について考えてみよう。

- (1) 温度 T で熱平衡にある系が状態 i にあるときのエネルギーを E_i とするとき、ボルツマン定数 k_B を用いて、分配関数 Q を表せ。また、系が状態 i をとる確率分布（ボルツマン分布） p_i を、 Q を用いて表せ。
- (2) 系の内部エネルギー U は $U = \sum_i p_i E_i$ で表されるものとする。このことを利用して、 $1/k_B T$ を β とし、 β と Q のみを用いて U を表せ。
- (3) 系が気体で構成されているとき、系の圧力 p を体積 V および β, Q で表した以下の式、

$$p = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \ln Q}{\partial V} \right)_{\beta}$$

を用いて、系のエンタルピー H を β, Q, V のみを用いて表せ。

[VI] 熱力学 解答

出題意図

カルノーサイクル (問 1), 分配関数 (問 2) を題材に, 熱力学・統計熱力学に関する基礎に関して理解しているかどうかを問う。

解答例

問1.

(1) 1 サイクルで内部エネルギーの変化 $\Delta U = 0$ より, $W_{\text{out}} = Q_{\text{in}} = Q_A - Q_B$

(2) 熱浴におけるエントロピーの変化量は $\Delta S = \Delta Q/T$ となるので,

$$\Delta S_A = Q_A/T_A, \quad \Delta S_B = -Q_B/T_B$$

理想的なエンジンの場合, $\Delta S_A + \Delta S_B = \frac{Q_A}{T_A} - \frac{Q_B}{T_B} = 0$ となるので, $\frac{Q_B}{Q_A} = \frac{T_B}{T_A}$

このときのエンジンの熱効率 η は, $\eta = \frac{W}{Q_A} = \frac{Q_A - Q_B}{Q_A} = 1 - \frac{Q_B}{Q_A} = 1 - \frac{T_B}{T_A}$

(3) 物体 D が高温熱源となるので, 高温熱源から受け取る熱量は $Q = C(-\Delta T)$

(2) で求めた理想的エンジンの熱効率を考えると,

$$\Delta W = \eta Q = \left(1 - \frac{T_B}{T_A}\right) C(-\Delta T) = -C\Delta T \left(1 - \frac{T_B}{T_A}\right)$$

$$\begin{aligned} (4) \quad W &= \sum_{T=T_A}^{T_B} \Delta W = \int_{T_A}^{T_B} dW = \int_{T_A}^{T_B} -C \left(1 - \frac{T_B}{T}\right) dT = -C \int_{T_A}^{T_B} dT + CT_B \int_{T_A}^{T_B} \frac{dT}{T} \\ &= -C(T_B - T_A) + CT_B [\ln T]_{T_A}^{T_B} = C(T_A - T_B) + CT_B \ln \frac{T_B}{T_A} \end{aligned}$$

問2.

(1) 分配関数 ; $Q = \sum_i \exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right)$, ボルツマン分布 ; $p_i = \frac{\exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right)}{Q}$

(2) $E_i e^{-\beta E_i} = -\frac{\partial}{\partial \beta} e^{-\beta E_i}$ より,

$$U = p_i E_i = \frac{1}{Q} \sum_i E_i e^{-\beta E_i} = -\frac{1}{Q} \frac{\partial}{\partial \beta} \sum_i e^{-\beta E_i} = -\frac{1}{Q} \frac{\partial Q}{\partial \beta} = -\frac{\partial \ln Q}{\partial \beta}$$

(3) $H = U + pV$ より, $p = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \ln Q}{\partial V}\right)_\beta$ を代入して,

$$H = -\left(\frac{\partial \ln Q}{\partial \beta}\right)_V + \frac{V}{\beta} \left(\frac{\partial \ln Q}{\partial V}\right)_\beta$$

[VII] 量子力学

1次元井戸型ポテンシャル $V(x)$ を、正の実定数 a を用いて次のように定める.

$$V(x) = \begin{cases} \infty & (x \leq 0 \text{ および } x \geq a) \\ 0 & (0 < x < a) \end{cases}$$

このポテンシャル中に存在する質量 m , エネルギー E の粒子の定常状態の波動関数 $\varphi(x)$ は, 時間に依存しないシュレーディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x)$$

に従う. ここで, $\hbar = h/2\pi$ (h :プランク定数) である. 波動関数は $x \leq 0$ および $x \geq a$ で0となるため, 境界条件は $\varphi(0) = \varphi(a) = 0$ である. 以下の間に答えよ. 必要に応じて次の公式を用いてよい. ただし, α は0でない実数, l は非負の整数とする.

$$\int x \sin(\alpha x) dx = -\frac{x}{\alpha} \cos(\alpha x) + \frac{1}{\alpha^2} \sin(\alpha x) + C \quad (C: \text{積分定数})$$
$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

- (1) $0 < x < a$ での波動関数 $\varphi(x)$ の一般解を示せ. 境界条件や規格化は考慮しなくてよい. ただし, $E > 0$ として, 波数を $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ とおく.
- (2) 規格化された固有関数 $\varphi_n(x)$ とエネルギー固有値 E_n を求めよ. ここで, 基底状態の固有関数を $\varphi_1(x)$, エネルギー固有値を E_1 とし, n が増加するごとにエネルギー準位が1つずつ高くなるものとする. また, 規格化定数は $x = 0$ における $\varphi_n(x)$ の右側微分 $\varphi_n'(0+)$ が正の実数となるように選ぶ.
- (3) 基底状態にある粒子の確率密度を x の関数としてグラフに示せ. グラフには, 確率密度が最大となる位置およびその値を明記すること.

次に, 粒子の規格化された波動関数が以下の $\psi(x)$ で表される状態を繰り返し準備し, それぞれに対してエネルギーを測定した. ここで, $A > 0$ は規格化定数である.

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0 \text{ および } x \geq a) \\ A \left(\frac{a}{2} - \left| x - \frac{a}{2} \right| \right) & (0 < x < a) \end{cases}$$

以下の間に答えよ.

- (4) 規格化定数 A を求めよ.
- (5) 状態 $\psi(x)$ に対してエネルギーを測定したとき, E_1 が得られる確率を求めよ.

- (6) 測定の繰り返し回数を増やしていったとき、エネルギーの平均値がどのような値に近づくか答えよ。
- (7) 状態 $\psi(x)$ に対してエネルギーを測定したところ、 E_1 が得られた。その後、粒子の位置を測定すると、粒子がどの位置に最も見つかりやすいか答えよ。

[VII] 量子力学 解答

出題意図

1次元無限井戸型ポテンシャル中の量子力学的な粒子の状態に関する問題を通して、量子力学の基礎的な知識を尋ねた。

解答例

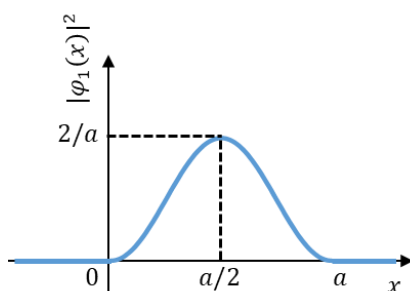
(1) $\varphi(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$ (A, B は任意定数)

(2)

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} x \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

(3) 確率密度は $|\varphi_1(x)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2 \frac{\pi}{a} x$ である。これをグラフにすると



(4) $A = 2\sqrt{3}a^{-\frac{3}{2}}$

(5) $\frac{96}{\pi^4}$

(6) $\frac{6\hbar^2}{ma^2}$

(7) E_1 が測定された後、波動関数は $\varphi_1(x)$ に変化するため、 $|\varphi_1(x)|^2$ が最大となる $a/2$ に最も見つかりやすい。

[VIII] 固体物性

n型シリコン (Si) 半導体とp型 Si 半導体を考える. 図 1 に両半導体の室温でのバンド図を模式的に示した. 図中, Si の価電子帯の上端エネルギーを E_V , 伝導帯の下端エネルギーを E_C , それぞれのフェルミ準位を E_{Fn} , E_{Fp} としている. また, n型 Si 中のドナー濃度を N_D , p型 Si 中のアクセプター濃度を N_A とする ($N_D < N_A$). 以下の問に答えよ.

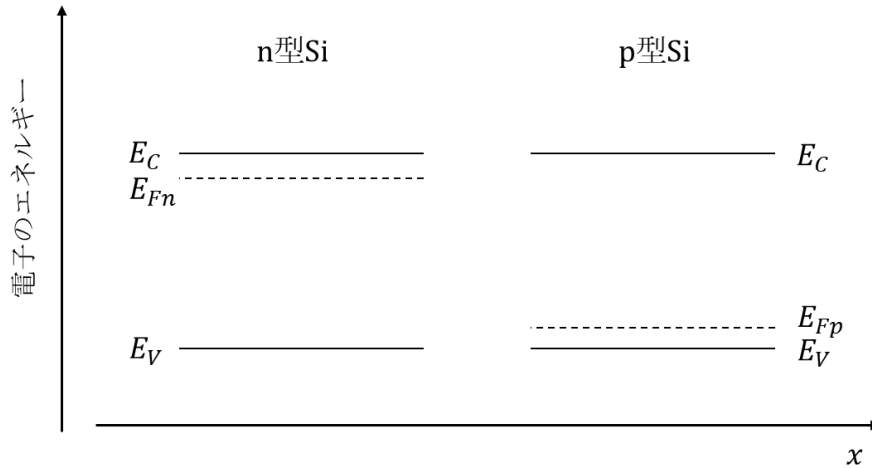


図 1

- (1) 上に記したn型 Si とp型 Si をx軸方向に接合してpn接合を形成する (接合面をx軸に垂直な面とする). するとx軸に沿って多数キャリア (電子及び正孔) の移動が起こる. 電子, 正孔の移動は, それぞれどのように起こるか述べよ.
- (2) 上に記した電子及び正孔の移動は, 両半導体のフェルミ準位が一致した (一致したフェルミ準位を E_F とする), すなわち熱平衡に達した時点で停止する (電子, 正孔の正味の移動量がゼロとなる). この時, pn接合のn型領域とp型領域の間には, 拡散電位 V_d とよばれる内部電位差が生じ, そのエネルギー差は qV_d となる (q は電気素量). このエネルギー差 qV_d を, 接合を形成する前のn型 Si, p型 Si のフェルミ準位 E_{Fn} , E_{Fp} を用いて表せ.
- (3) 上に記した熱平衡状態にある Si のpn接合では, 接合のn型側とp型側, 両方にキャリアがほとんど存在しない空乏層と呼ばれる電気二重層が形成される. この電気二重層の電荷の担い手が, それぞれどのようなものになるか答えよ.
- (4) 空乏層にはキャリアは全く存在せず, その以外の領域は中性であると近似する (空乏層近似). 空乏層近似の下, x軸に沿った空乏層の幅を, n型側: x_n , p型側: x_p とした場合に, その比 x_n/x_p は N_D 及び N_A を用いてどのように表されるか示せ. ここで Si 中のドナー, アクセプターは一様に分布し, 室温で全てイオン化しているとする.
- (5) 問(1)から(4)までの結果をもとに, Si pn接合のバンド図を描け. バンド図は, x軸を横軸, 電子のエネルギーを縦軸に取り, 図中に, E_V , E_C , E_F , x_n , x_p 及び qV_d を書き込むこと.

[VIII] 固体物性 解答

出題意図

半導体のpn接合について正しく理解できているかを問う。

解答例

(1)

電子はn型側からp型側に移動。正孔はp型側からn型側に移動。

(2)

$$qV_d = E_{Fn} - E_{Fp}$$

(3)

n型側はイオン化ドナー（プラス）、p型側はイオン化アクセプター（マイナス）が電荷を担う。

(4)

空乏層（電気二重層）中の単位面積当たりの正の電荷量と負の電荷量は等しいので、

$$N_D x_n = N_A x_p$$

よって、

$$x_n/x_p = N_A/N_D$$

(5)

