関西学院大学大学院理工学研究科

2025 年度入学試験

（一次：2024 年 8 月 2 日実施）

専門科目

物理・宇宙物理学専攻

（11:10-13:10　120 分）

【試験にあたっての注意】

1. 筆記用具以外はカバンに入れ、カバンは床の上に置くこと。
2. 携帯電話、スマートフォン、ウェアラブル端末、音楽プレーヤー等の音の出る機器の電源を切ること。なお、アラームを設定している人は解除してから電源を切り、カバンにしまうこと。
3. 時計のアラームは解除すること。携帯電話を時計として使用することは認めない。
4. 試験の途中退出は認めない。ただし、やむを得ない場合は挙手し監督者に知らせること。
5. 不審な言動は慎むこと。不正行為が発覚した場合、全科目を 0 点とする。
6. 試験用紙は以下の構成となっている。
   ①　問題冊子 1 冊
   ②　解答用紙
7. 指示があるまで問題冊子および解答用紙を開かないこと。
8. 解答用紙のホチキスは、はずさないこと（提出時もホチキス留めのまま提出すること）。
9. 各問題は、所定の解答用紙に解答すること。
10. 解答にあたっては、問題冊子および解答用紙に書かれた注意に従うこと。
11. 解答用紙には、氏名は記入せず、受験番号のみを記入すること。
12. 原則、解答用紙の裏面使用は不可。やむを得ず解答欄が不足する場合は＜裏面に続く＞と記載することで、裏面への記載を認める。
13. 試験終了後、問題冊子は各自持ち帰ること。

以上

［物理・宇宙物理学専攻（専門科目）］

次の［Ｉ］～［Ⅳ］すべてに解答せよ。
なお、解答用紙は大問１ 題につき１ 枚使用すること。

［I］以下の問 (1)〜(8) に答えよ．万有引力定数 G を用いて良い．

(1) 質量 M の質点から距離 r 離れたところにある質量 m_0 の質点にはたらく万有引力の大きさを記せ．

半径 R，一定密度 ρ_0 の球体について考える．

(2) 中心からの距離 $z(< R)$ に含まれる球体の質量を求めよ．

球体内部における球体中心から距離 $z(< R)$ だけ離れた点にはたらく万有引力は，半径 z の球体の全質量が中心に集中した場合の万有引力に等しい．この球体の中心を通る直径に貫く穴を作り，球体表面上の両端を A, B とする．質量 m の質点を一端 A から静かに穴に入れる．

(3) 質点の運動方程式を記述し，どのような運動になるか説明せよ．

(4) 最初に他端 B に達するまでの時間を求めよ．

(5) A から質点を適当な速さで投射して球体に触れることなく表面に沿って半円運動させた後に B に達するまでの時間を求めよ．

(6) 球体の中心を通る回転軸のまわりの慣性モーメントを求めよ．

次に，半径 R，密度が中心部と外層部で以下のような異なる二層構造をしている球体を考える．

$$\rho(z) = \begin{cases} \dfrac{10}{3}\rho_0 & (0 < z \leq \dfrac{1}{2}R) \\ \\ \dfrac{2}{3}\rho_0 & (\dfrac{1}{2}R < z \leq R) \end{cases}$$

(7) 球体の質量を求めよ．

(8) 球体の中心を通る回転軸のまわりの慣性モーメントを求めよ．また，問 (6) の密度一定の場合に比べてどうなるかを説明せよ．

［II］ 以下の問［A］,［B］に答えよ.

［A］図のように，点電荷 $q\,(>0)$ が z 軸上の点 $(0,0,d)$ に，また点電荷 $-q$ が $(0,0,-d)$ に置かれている.

(1) 点 P の位置を $\vec{r}=(x,y,z)$ とする．点 P における静電ポテンシャル $\phi(\vec{r})$ を q, d, x, y, z で表せ．ただし，静電ポテンシャルの基準点を無限遠とする．また，真空の誘電率を ε_0 とする.

(2) 原点 O から点 P までの距離を $r=|\vec{r}|$（ただし，$d \ll r$）とし，電荷 q から点 P までの距離を r_+，電荷 $-q$ から点 P までの距離を r_- とする．$1/r_+$，$1/r_-$ を d/r の 1 次の項までで近似すると，それぞれ,

$$\frac{1}{r_+} \fallingdotseq \frac{1}{r}\left(1+\frac{d}{r}\cos\theta\right), \qquad \frac{1}{r_-} \fallingdotseq \frac{1}{r}\left(1-\frac{d}{r}\cos\theta\right)$$

となることを示せ．ここで θ は z 軸と $\vec{r}$ のなす角である.

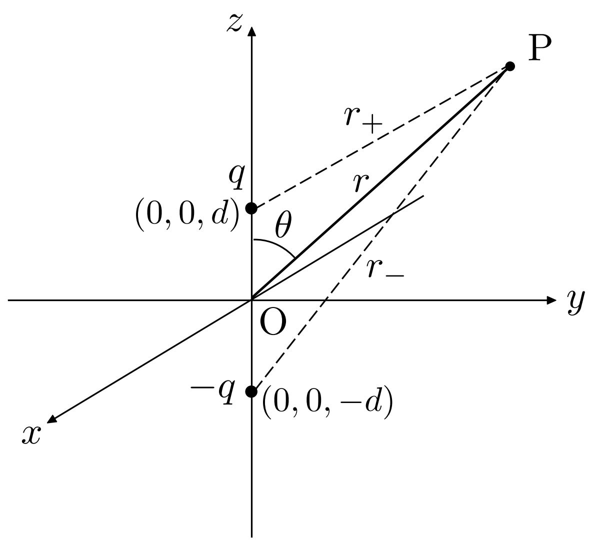
(3) 小問 (2) の結果を用いて，静電ポテンシャル $\phi(\vec{r})$ を d/r の 1 次の項までで近似せよ．結果は，q, r, d, θ で表せ.

(4) 電気双極子モーメントを $\vec{p}=2qd\,\vec{e}_z$ で定義する．ただし，$\vec{e}_z$ は z 軸方向の単位ベクトルである．このとき，小問 (3) で得た $\phi(\vec{r})$ を $\vec{p}$, $\vec{r}$, r で表せ.

(5) 小問 (4) の結果を用いて，点 P における電場 $\vec{E}(\vec{r})$ が,

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\,\vec{r}}{r^5}-\frac{\vec{p}}{r^3}\right]$$

となることを示せ.



[B] 磁場 $\vec{B}$ の中を運動する速度 $\vec{v}$ の荷電粒子におよぼされる単位電荷あたりの力は，

$$\vec{f} = \vec{v} \times \vec{B} \qquad\qquad (*)$$

で与えられる．

(1) ある点で $\vec{f}$ と $\vec{v}$ を測定する．$\vec{f}$ と $\vec{v}$ を知るだけでは $\vec{B}$ を決定することができないことを示せ．

(2) 式 (*) を用いて，

$$\vec{B} = \frac{\vec{f} \times \vec{e}_v}{v} + (\vec{B} \cdot \vec{e}_v)\,\vec{e}_v$$

が成り立つことを示せ．ただし，$v = |\vec{v}|$，$\vec{e}_v = \vec{v}/v$ である．必要なら，ベクトル公式 $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$ を用いてよい．

(3) ある点で 2 個の荷電粒子に対して，それぞれ $\vec{f}$ と $\vec{v}$ を測定し，粒子 1 について $\vec{f}_1$，$\vec{v}_1$，粒子 2 について $\vec{f}_2$，$\vec{v}_2$ を得たとする．このとき，$\vec{v}_1$ と $\vec{v}_2$ が直交していたと仮定して，点 P での $\vec{B}$ を $\vec{f}_1$，$\vec{v}_1$，v_1，$\vec{f}_2$，$\vec{v}_2$，v_2 で表せ．

[III] x 軸上を運動する量子力学的粒子の位置演算子 $\hat{x}$ と運動量演算子 $\hat{p}$ は, 時刻 t における粒子の量子状態を表す波動関数 $\Psi_t(x)$ に対し, それぞれ次のように作用する.

$$\hat{x}\,\Psi_t = x\,\Psi_t(x)\ , \qquad\qquad \hat{p}\,\Psi_t = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\,\Psi_t(x)\ .$$

(1) 「波動関数 Ψ_t が規格化されている」とは, Ψ_t がどのような式を満たすことか, 記せ.

(2) 規格化された波動関数 Ψ_t を用いて, 以下の量をそれぞれ記せ.

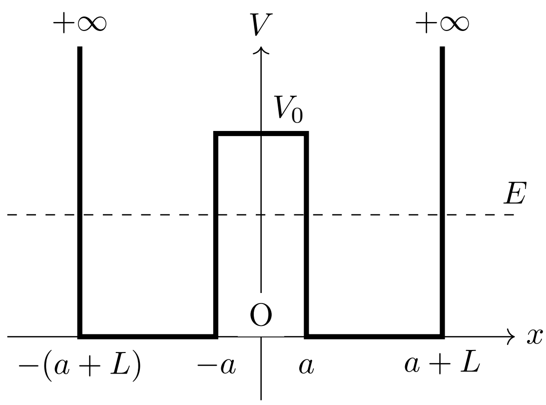
- 粒子の位置測定をしたとき, 粒子を位置 x に見出す確率密度 $P_t(x)$
- 粒子の運動量期待値 $\langle\ p\ \rangle_t$

粒子の質量を m として, 粒子の Hamiltonian が $\hat{H} = \dfrac{\hat{p}^2}{2\,m} + V(\hat{x})$ で与えられるとする. $\hat{H}$ の固有値 (エネルギー固有値) と対応する固有状態を, それぞれ E, $u_E(x)$ とする.

(3) エネルギー固有状態 $u_E(x)$ がしたがう固有値方程式 (Schrödinger 方程式) を記せ.

ポテンシャル V が偶関数 $V(-x) = V(x)$ で, 右図のような二重井戸型であるとする.

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{for} \quad 0 \le |\,x\,| < a \\ 0 & \text{for} \quad a < |\,x\,| < a+L \\ +\infty & \text{for} \quad a+L < |\,x\,| \end{cases}$$



(4) $x = \pm(a+L)$ のそれぞれで, $u_E(x)$ に課す境界条件を記せ.

ポテンシャルが偶関数の場合, $u_E(x)$ を偶関数, もしくは, 奇関数のいずれかに限定して考えてよい. このとき, $x = 0$ で適切な境界条件を課すことで, エネルギー固有値方程式は, $x \ge 0$ の領域で考えれば十分となる. 以下, $u_E(x)$ が偶関数の場合を考える.

(5) $x = 0$ で $u_E(x)$ に課すべき境界条件が, $u'_E(0) = 0$ となることを示せ.

(6) V_0 より小さなエネルギー固有値 E $(< V_0)$ は, 次式の解として与えられることを示せ.

$$-\frac{\tan(kL)}{k} = \frac{1}{\sigma}\,\frac{e^{\sigma a} + e^{-\sigma a}}{e^{\sigma a} - e^{-\sigma a}} \qquad \left(k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\ ,\quad \sigma = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} \right)$$

(7) 極限 $V_0 \to +\infty$ でのエネルギー固有値 $E_1^{(\infty)} < E_2^{(\infty)} < E_3^{(\infty)} < \cdots$ を求めよ.

(8) V_0 が有限値 (ただし, $E \ll V_0$) であるときの固有値 $E_1 < E_2 < E_3 < \cdots$ が, $E_n < E_n^{(\infty)}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を満たすことを示せ.

[IV]　3次元空間内で体積 V の有限領域内にある N 個の同種粒子からなり，温度 T の熱平衡状態にある古典力学的気体について，以下の問 [A]，[B] に答えよ．ただし，粒子の質量を m，ボルツマン定数を k_B，プランク定数を h とする．また，N は十分大きいとし近似式 $N! \approx \left(\dfrac{N}{e}\right)^N$ を用いよ．

[A]　気体を構成する粒子は質点とみなせるとし，この系のハミルトニアンが

$$H = \sum_{j=1}^{N} \frac{p_{jx}^2 + p_{jy}^2 + p_{jz}^2}{2m}$$

と表されるとする．ここで，j 番目の質点の運動量ベクトルを (p_{jx}, p_{jy}, p_{jz}) とする．

(1) この系のヘルムホルツの自由エネルギーを F とするとき，この系のカノニカル分布を H，F，k_B，T を用いて表せ.

(2) F を N，V，k_B，T，m，h から必要な量を用いて表せ.

(3) 小問 (2) で得られた F の表式を用いて，この系の圧力を計算し，N，V，k_B，T，m，h から必要な量を用いて表せ.

(4) 小問 (2) で得られた F の表式を用いて，この系の内部エネルギーと定積熱容量を計算し，N，V，k_B，T，m，h から必要な量を用いて表せ.

[B]　気体を構成する粒子は一定の大きさ μ の電気双極子モーメントをもつ分子で，さらに，この気体が大きさ $\mathcal{E}$ の一様な電場内にあり，この系のハミルトニアンが

$$H = \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{p_{jx}^2 + p_{jy}^2 + p_{jz}^2}{2m} + \frac{1}{2I}\left(p_{j\theta}^2 + \frac{p_{j\phi}^2}{\sin^2\theta_j} \right) - \mu\mathcal{E}\cos\theta_j \right]$$

と表されるとする．ここで，j 番目の分子の重心の運動量ベクトルを (p_{jx}, p_{jy}, p_{jz})，その分子の重心の周りの角度を表す座標を $\theta_j \in [0, \pi]$ と $\phi_j \in [0, 2\pi)$，さらに，θ_j と ϕ_j に対応する回転の運動量をそれぞれ $p_{j\theta}$ と $p_{j\phi}$ とし，また，I は正の定数とする．

(1) この系のヘルムホルツの自由エネルギーを F，この系のカノニカル分布による $\cos\theta_j$ の平均を $\langle\cos\theta_j\rangle$ とするとき，$\left.\dfrac{\partial F}{\partial \mathcal{E}}\right|_{T,V}$ を，V と電気分極 $\mathcal{P} = \dfrac{\mu}{V}\sum_{j=1}^{N}\langle\cos\theta_j\rangle$ を用いて表せ.

(2) F を計算し，N，V，k_B，T，m，h，I，μ，$\mathcal{E}$ から必要な量を用いて表せ.

(3) $\mathcal{P}$ を計算し，N，V，k_B，T，m，h，I，μ，$\mathcal{E}$ から必要な量を用いて表せ.

(解答例)〔I〕力学

(1) 質点 m に働く万有引力の大きさは, $F = \dfrac{Gm_0M}{z^2}$.

(2) 中心からの距離 z，すなわち半径 z の球体の体積は $V = \dfrac{4}{3}\pi z^3$ であり，今密度一定であるから半径 z の球体の質量は，$M(z) = \dfrac{4}{3}\pi z^3\rho_0$ となる．(全質量は $M_1 = \dfrac{3}{4}\pi\rho_0 R^3$)

(3) 題意により，質点 m にかかる力は半径 z の球体の質量が球体の中心（$z = 0$）にあるとしたときの万有引力のみである．球体の中心を原点とし A の方向を z 軸の正とすると質点の従う運動方程式は　$m\dfrac{d^2z}{dt^2} = -\dfrac{4}{3}\pi\rho_0 mGz$ となり，角振動数　$\omega = \sqrt{\dfrac{4\pi\rho_0 G}{3}}$ の単振動である．

(4) 前問より，周期は $\dfrac{2\pi}{\omega}$ であり，最初に B に達するまでの時間は 周期の半分なので $\sqrt{\dfrac{3\pi}{4\rho_0 G}}$ となる．

(5) 球体の万有引力を向心力とする半径 R の円運動をするので，運動方程式は $mR\omega^2 = \dfrac{m(\frac{4}{3}\pi\rho_0 R^3)G}{R^2}$ より，角振動数 $\omega_{\text{円運動}} = \sqrt{\dfrac{4\pi\rho_0 G}{3}}$ となる，B に到達する時間は周期の半分なので，$t_{\text{円運動}} = \sqrt{\dfrac{3\pi}{4\rho_0 G}}$.

(6) 中心を原点とし中心を通る（AB を z 軸とする）円柱座標で z 軸の周りの慣性モーメント (I_{1zone} とする) を求める,

$$dm = \rho_0 dV = \rho_0 drrd\theta dz$$

$$I_{1zone} = \int r^2 dm = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-R}^{R} dz \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} dr\rho_0 r^3 = \frac{\pi}{2}\rho_0 \int_{-R}^{R} dz(R^2 - z^2)^2 = \frac{8}{15}\pi\rho_0 R^5$$

(7) 二層構造の球体質量を M_2 として，$M_2 = \dfrac{4}{3}\pi\rho_1(\dfrac{R}{2})^3 + \dfrac{4}{3}\pi\rho_2\Big(R^3 - (\dfrac{R}{2})^3\Big) = \dfrac{4}{3}\pi\rho_0 R^3$

(8) 二層構造の場合の慣性モーメントを I_{2zone} として $I_{2zone} = \dfrac{2}{5}\pi\rho_0 R^5 = \dfrac{3}{4}I_{1zone}$ となり，密度一定の場合に比べて小さくなる．

出題意図

〔I〕力学

力学分野の学力を問う基礎的な問題である．
質点にはたらく万有引力を求める基本事項の理解を確認し，大きさのある球体について，その内部における万有引力，内部を通る質点の運動，剛体の慣性モーメントへの理解を問うた．

[II] 電磁気　解答

[A]

1.

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}}\right].$$

2. $r_+ = \sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}$ を $r, d, \cos\theta$ で表すと，

$$r_+ = \sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta} = r\sqrt{1+\left(\frac{d}{r}\right)^2 - 2\frac{d}{r}\,\cos\theta}.$$

よって，d/r の 1 次までの近似で，

$$\frac{1}{r_+} = \frac{1}{r}\left(1+\frac{d}{r}\cos\theta\right).$$

$r_- = \sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}$ を $r, d, \cos\theta$ で表すと，

$$r_- = \sqrt{r^2+d^2+2rd\cos\theta} = r\sqrt{1+\left(\frac{d}{r}\right)^2 + 2\frac{d}{r}\,\cos\theta}.$$

d/r の 1 次までの近似で，

$$\frac{1}{r_-} = \frac{1}{r}\left(1-\frac{d}{r}\cos\theta\right).$$

3.

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+}-\frac{1}{r_-}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\frac{2d}{r}\cos\theta = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qd\cos\theta}{r^2}.$$

4. $\cos\theta = \vec{e}_z\cdot\vec{r}/r$ だから，

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2qd\,\vec{e}_z\cdot\vec{r}/r}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}.$$

5. 電場は，$\vec{E} = -\nabla\phi$ で与えられる．i 成分は，

$$E_i = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\sum_{j=1}^{3} p_j x_j}{r^3}\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=1}^{3} p_j\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_j}{r^3}\right).$$

ここで，$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ より，

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}.$$

よって，

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_j}{r^3}\right) = \frac{\delta_{ij}}{r^3} - x_j\frac{3}{r^4}\,\frac{x_i}{r}.$$

よって，

$$E_i = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{p_j}{r^3}\delta_{ij} - \frac{3p_j x_j x_i}{r^5}\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{p_i}{r^3} - \frac{3\vec{p}\cdot\vec{r}\,x_i}{r^5}\right).$$

これをベクトルで表すと，

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{p}}{r^3} - \frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\,\vec{r}}{r^5}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\,\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right].$$

[B]

1. 式 (*) を成分で書くと，

$$f_x = v_y B_z - v_z B_y, \quad f_y = v_z B_x - v_x B_z, \quad f_z = v_x B_y - v_y B_x.$$

これを行列を用いて書くと，

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -v_z & v_y \\ v_z & 0 & -v_x \\ -v_y & v_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \qquad (**)$$

このとき，行列

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -v_z & v_y \\ v_z & 0 & -v_x \\ -v_y & v_x & 0 \end{pmatrix}$$

の行列式は，$\det D = 0$．したがって，$\vec{f}$ と $\vec{v}$ の成分を用いて，式 (**) から $\vec{B}$ の成分を求めることはできない．

2. $\vec{f} = \vec{v} \times \vec{B}$ の両辺と $\vec{e}_v$ の外積をとる．

$$\begin{aligned} \vec{f} \times \vec{e}_v &= (\vec{v} \times \vec{B}) \times \vec{e}_v = \vec{e}_v \times (\vec{B} \times \vec{v}) = \vec{B}(\vec{e}_v \cdot \vec{v}) - \vec{v}(\vec{e}_v \cdot \vec{B}) \\ &= \vec{B} v - \vec{v}(\vec{e}_v \cdot \vec{B}). \end{aligned}$$

両辺を v で割って，

$$\frac{\vec{f} \times \vec{e}_v}{v} = \vec{B} - \vec{e}_v(\vec{e}_v \cdot \vec{B}).$$

よって，

$$\vec{B} = \frac{\vec{f} \times \vec{e}_v}{v} + \vec{e}_v(\vec{e}_v \cdot \vec{B}).$$

3. 小問 (2) の結果から，

$$\vec{B} = \frac{\vec{f}_1 \times \vec{e}_{v1}}{v_1} + \vec{e}_{v1}(\vec{e}_{v1} \cdot \vec{B}), \quad \vec{B} = \frac{\vec{f}_2 \times \vec{e}_{v2}}{v_2} + \vec{e}_{v2}(\vec{e}_{v2} \cdot \vec{B}), \qquad (***)$$

式 (***) の第 2 式と $\vec{e}_{v1}$ の内積をとり，$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$ を用いると，

$$\vec{B} \cdot \vec{e}_{v1} = \frac{(\vec{f}_2 \times \vec{e}_{v2}) \cdot \vec{e}_{v1}}{v_2}.$$

これを式 (***) の第 1 式に代入して，

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\vec{f}_1 \times \vec{e}_{v1}}{v_1} + \vec{e}_{v1} \frac{(\vec{f}_2 \times \vec{e}_{v2}) \cdot \vec{e}_{v1}}{v_2} = \frac{\vec{f}_1 \times \vec{e}_{v1}}{v_1} - \frac{\vec{f}_2 \cdot (\vec{e}_{v1} \times \vec{e}_{v2})}{v_2} \vec{e}_{v1} \\ &= \frac{\vec{f}_1 \times \vec{v}_1}{v_1^2} - \frac{\vec{f}_2 \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)}{v_1 v_2^2} \frac{\vec{v}_1}{v_1}. \end{aligned}$$

出題意図

１次

[II]　電磁気

電磁気学の基本的な知識と理解を見る問題である．

[A] 静電場の問題で，クーロン場と電気双極子の理解を問う問題である．

[B] 静磁場の問題で，ローレンツ力と磁場の関係について問う問題である．

［III］ **量子力学 解答例**

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx \,\bigl|\,\Psi_t(x)\,\bigr|^2 = 1\ .$

(2) $P_t(x) = \bigl|\,\Psi_t(x)\,\bigr|^2\ ,\qquad \displaystyle\langle\, p\,\rangle_t = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \Psi_t^*(x)\ \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\,\Psi_t(x)\ .$

(3) $\displaystyle E\,u_E(x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2\,m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right) u_E(x)\ .$

(4) 境界条件は $u_E(-a-L) = u_E(a+L) = 0.$

(5) 偶関数 $u_E(-x) = u_E(x)$ に対し, $-u_E'(-x) = u_E'(x)$ となるので, $u_E'(0) = 0$ を課せばよい.

(6) $x = 0, a+L$ での境界条件を満たす解は, $k := \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar},\ \ \sigma := \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$ として,

$$u_E(x) \propto \begin{cases} e^{\sigma x} + e^{-\sigma x} & \text{for}\ \ 0 < x < a \\ C\,\sin\{k\,(x-a-L)\} & \text{for}\ \ a < x < a+L \end{cases}\ ,$$

となる. $x = a$ で u_E が滑らかに接続される条件より, $x = a$ での対数微分を考えて,

$$\frac{k}{\tan(-kL)} = \sigma\,\frac{e^{\sigma a} - e^{-\sigma a}}{e^{\sigma a} + e^{-\sigma a}} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\tan(kL)}{-k} = \frac{1}{\sigma}\,\frac{e^{\sigma a} + e^{-\sigma a}}{e^{\sigma a} - e^{-\sigma a}}\ .$$

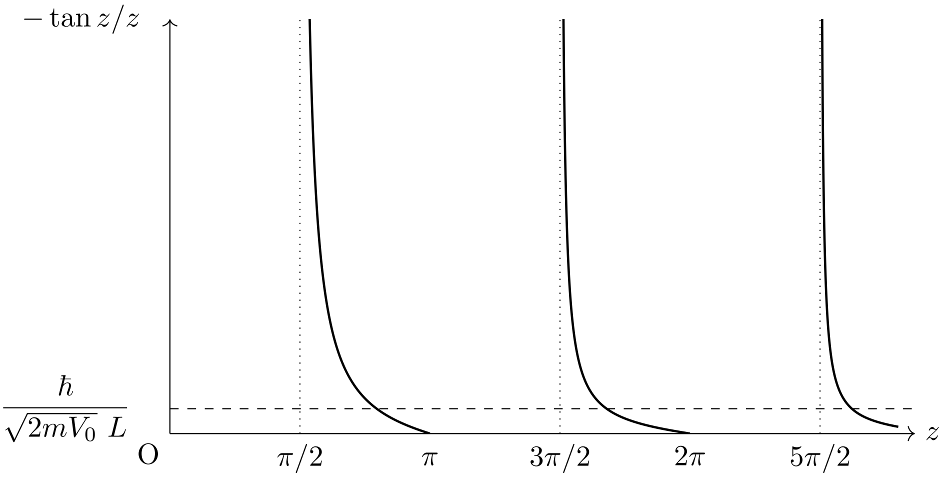
(7) 極限 $V_0 \to +\infty$ で $\sigma \to +\infty$ となるので, 前小問の結果より, $\tan(kL) = 0\ (k \neq 0)$ を得る. よって, $k_nL = n\,\pi\ (n = 1, 2, \cdots)$ より, 次の結果を得る:

$$E_n^{(\infty)} = \frac{\hbar^2\,k_n^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left(\frac{n\,\pi\,\hbar}{L}\right)^2 \qquad (n = 1, 2, \cdots)\ .$$

(8) V_0 が十分大きな有限値 $V_0 \gg E$ であるとき, $z := kL$ として,

$$\frac{\tan(kL)}{-k} \sim \frac{1}{\sigma} \sim \frac{\hbar}{\sqrt{2mV_0}} \quad\Rightarrow\quad -\frac{\tan z}{z} \sim \frac{\hbar}{\sqrt{2mV_0}\ L} > 0\ ,$$

を得る. 下図より, $k_n\,L < n\,\pi$, すなわち, $E_n < E_n^{(\infty)}$ となることが分かる.



出題意図

[III]　量子力学

量子力学の理論的な枠組みに対する理解度と，矩形ポテンシャルのエネルギー固有値問題という典型例に対する具体的な運用力とを問うた.

[IV]　解答

[A]　(1) $\exp\left(\frac{F-H}{k_BT}\right)$

(2) この系の分配関数 Ξ は $\Xi=\int\frac{d\boldsymbol{\Gamma}}{h^{3N}N!}\ \exp\left(-\frac{H}{k_BT}\right)\approx\left[\frac{eV}{N}\left(\frac{2\pi mk_BT}{h^2}\right)^{3/2}\right]^N$ と表されることから

$$F=-Nk_BT\log\Xi\approx-Nk_BT\ln\left[\frac{eV}{N}\left(\frac{2\pi mk_BT}{h^2}\right)^{3/2}\right].$$

(3) この系の圧力 P は

$$P=-\left.\frac{\partial F}{\partial V}\right|_T\approx\frac{Nk_BT}{V}.$$

(4) $\beta\equiv\frac{1}{k_BT}$ を用いて，この系の内部エネルギー E と定積熱容量 C_v は

$$E=\left.\frac{\partial(\beta F)}{\partial\beta}\right|_V\approx\frac{3}{2}Nk_BT,\qquad C_v=\left.\frac{\partial E}{\partial T}\right|_V\approx\frac{3}{2}Nk_B.$$

[B]　(1) この系のヘルムホルツの自由エネルギー $F=-k_BT\ln\int\frac{d\boldsymbol{\Gamma}}{h^{3N}N!}\ \exp\left(-\frac{H}{k_BT}\right)$ から得られる式 $\frac{\partial F}{\partial\mathcal{E}}=-\sum_{j=1}^{N}\mu\langle\cos\theta_j\rangle$ と電気分極 $\mathcal{P}$ の定義式から求める式 $\frac{\partial F}{\partial\mathcal{E}}=-V\mathcal{P}$ が得られる.

(2) この系の分配関数 Ξ は，$\boldsymbol{p}_j\equiv(p_{jx},p_{jy},p_{jz})$，$\beta\equiv\frac{1}{k_BT}$ および，$\boldsymbol{q}_j$ を j 番目の粒子の重心の位置ベクトルとして

$$\begin{aligned}\Xi^{(tran)}&=\int\frac{d\boldsymbol{q}_jd\boldsymbol{p}_j}{h^3}\ \exp\left(-\beta\frac{|\boldsymbol{p}_j|^2}{2m}\right)=V\left(\frac{2\pi m}{\beta h^2}\right)^{3/2},\\ \Xi^{(rot)}&=\int_{-\infty}^{+\infty}dp_{j\phi}\int_{-\infty}^{+\infty}dp_{j\theta}\int_0^{2\pi}d\phi_j\int_0^{\pi}d\theta_j\ \frac{1}{h^2}\exp\left\{-\beta\left[\frac{1}{2I}\left({p_{j\theta}}^2+\frac{1}{\sin^2\theta_j}p_{j\phi}^2\right)-\mu\mathcal{E}\cos\theta_j\right]\right\}\\ &=\frac{4\pi^2I}{\beta h^2}\int_0^{\pi}d\theta_j\ \sin\theta_j\exp\left(\beta\mu\mathcal{E}\cos\theta_j\right)=\frac{8\pi^2I}{\beta^2h^2\mu\mathcal{E}}\sinh\left(\beta\mu\mathcal{E}\right)\end{aligned}$$

を用いて $\Xi=\frac{1}{N!}\left[\Xi^{(tran)}\Xi^{(rot)}\right]^N\approx\left[\frac{8e\pi^2IV}{N\beta^2h^5\mu\mathcal{E}}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}\sinh\left(\beta\mu\mathcal{E}\right)\right]^N$ で与えられることから

$$F=-Nk_BT\log\Xi\approx-Nk_BT\ln\left[\frac{8e\pi^2IV(k_BT)^{7/2}}{Nh^5\mu\mathcal{E}}\left(2\pi m\right)^{3/2}\sinh\left(\frac{\mu\mathcal{E}}{k_BT}\right)\right].$$

(3) この系の $\mathcal{P}$ は

$$\mathcal{P}=-\frac{1}{V}\frac{\partial F}{\partial\mathcal{E}}\approx\frac{N\mu}{V}\left[\frac{1}{\tanh\left(\frac{\mu\mathcal{E}}{k_BT}\right)}-\frac{k_BT}{\mu\mathcal{E}}\right].$$

＜出題の意図＞

古典統計力学におけるカノニカル分布の方法を用い、系のハミルトニアンから熱平衡状態にある系の熱力学的量を計算する手続きに関する理解度を、質点系および２分子系の理想気体の場合に問う問題である。