

関西学院大学大学院理工学研究科

2025 年度入学試験

(一次：2024 年 8 月 2 日実施)

専門科目

数理科学専攻

(11:10-13:10 120 分)

【試験にあたっての注意】

1. 筆記用具以外はカバンに入れ、カバンは床の上に置くこと。
2. 携帯電話、スマートフォン、ウェアラブル端末、音楽プレーヤー等の音の出る機器の電源を切ること。
なお、アラームを設定している人は解除してから電源を切り、カバンにしまうこと。
3. 時計のアラームは解除すること。携帯電話を時計として使用することは認めない。
4. 試験の途中退出は認めない。ただし、やむを得ない場合は挙手し監督者に知らせること。
5. 不審な言動は慎むこと。不正行為が発覚した場合、全科目を 0 点とする。
6. 試験用紙は以下の構成となっている。
 - ① 問題冊子 1 冊
 - ② 選択問題調査書、解答用紙
7. 指示があるまで問題冊子および解答用紙を開かないこと。
8. 解答用紙のホチキスは、はずさないこと（提出時もホチキス留めのまま提出すること）。
9. 各問題は、所定の解答用紙に解答すること。
10. 解答にあたっては、問題冊子および解答用紙に書かれた注意に従うこと。
11. 解答用紙には、氏名は記入せず、受験番号のみを記入すること。
12. 原則、解答用紙の裏面使用は不可。やむを得ず解答欄が不足する場合は＜裏面に続く＞と記載することで、裏面への記載を認める。
13. 試験終了後、問題冊子は各自持ち帰ること。

以上

[数理科学専攻（専門科目）] 解答にあたって

必須問題2題、選択問題1題の合計3題（1題100点）を解答すること。

必須問題は、線形代数1題、微積分1題である。

選択問題は、代数（群論・可換環論）、幾何（曲線論・曲面論）、解析（微分方程式・複素関数論）、確率・統計の4題から1題を選択すること。

ただし、選択問題は、指導を希望する教員から指示された分野の問題でなければならない。

解答用紙は1問につき1枚使用すること。

[数理科学専攻 (専門科目)]

〔 1 〕 (必須問題) 次の問いに答えよ .

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について , 固有値・固有ベクトルを求めて , 対角化せよ .

(2) 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$ に対して , 線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を $f(x) = Bx$ と定義

する . f は全射でないとする .

(i) 定数 a の値を求めよ .

(ii) f の像 $\text{Im } f = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^3\}$ および核 $\text{Ker } f = \{x \mid f(x) = 0\}$ の基底 (基) をそれぞれ求めよ .

(iii) 線形写像 $g : \text{Im } f \rightarrow \text{Im } f$ を $g(x) = Bx$ と定義するとき , (ii) で求めた $\text{Im } f$ の基底 (基) に関する g の表現行列 C を求めよ .

〔 2 〕 (必須問題) 次の問いに答えよ .

(1) 閉領域 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$ および関数

$f(x, y) = \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$ について , 2 重積分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ の値を求めよ .

(2) 次の関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1,2,\dots}$ が区間 $[0, 1]$ 上で各点収束しているかを調べよ . 各点収束している場合には極限関数を求め , さらに , 関数列が極限関数に区間 $[0, 1]$ 上で一様収束しているかを調べよ .

(i) $f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}$

(ii) $f_n(x) = n^{\frac{1}{4}} x e^{-nx^2}$

〔 3 〕 （代数）5 次対称群 S_5 の部分群

$$G = \{\sigma \in S_5 \mid \sigma(2) = 2\}$$

および G の正規部分群

$$H = \{e, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$$

について考える．ただし， e は S_5 の単位元であり，

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

である．

- (1) G がアーベル群であるかどうか理由をつけて答えよ．
- (2) H が巡回群であるかどうか理由をつけて答えよ．
- (3) H が S_5 の正規部分群であるかどうか理由をつけて答えよ．
- (4) H の部分群をすべて求めよ．ただし，それら以外に H の部分群が存在しない理由がはっきり分かるように書くこと．
- (5) 剰余群 G/H がアーベル群かどうか理由をつけて答えよ．

〔 4 〕 （幾何）パラメータ表示された曲面 $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$p(u, v) = \begin{pmatrix} \cosh u \cos v \\ \cosh u \sin v \\ 2 \sinh u \end{pmatrix} \quad ((u, v) \in \mathbb{R}^2)$$

で定めるとき，次の問いに答えよ．なお，(1) は結果だけを答えること．

- (1) $x = \cosh u \cos v$, $y = \cosh u \sin v$, $z = 2 \sinh u$ から u, v を消去して， x, y, z が満たす関係式を求めよ．また， $p(u, v) ((u, v) \in \mathbb{R}^2)$ の軌跡と xz 平面 (平面 $y = 0$) との交線の概形を描け．
- (2) 曲面 p の第一基本量 $E = \langle p_u, p_u \rangle$, $F = \langle p_u, p_v \rangle$, $G = \langle p_v, p_v \rangle$ を求めよ．ただし， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathbb{R}^3$ の標準的内積とし， $p_u = \frac{\partial p}{\partial u}$, $p_v = \frac{\partial p}{\partial v}$ とする．
- (3) $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ における曲面 p の単位法ベクトル $\nu(u, v)$ を求めよ．
- (4) 曲面 p の Gauss (ガウス) 曲率 K を求めよ．

〔 5 〕 （解析）次の問いに答えよ．

- (1) 2 階微分方程式 $y'' + 2y' + 3y = \sin 2x$ の一般解 $y = y(x)$ を求めよ．
(2) 次の積分の値を求めよ．

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos \pi x}{x^2 + 2x + 5} dx, \quad J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \pi x}{x^2 + 2x + 5} dx$$

〔 6 〕 （確率・統計）次の問いに答えよ．

- (1) 勝ち, 負け, 引き分けのいずれかが起こるゲームを 2 回繰り返す. 勝ち, 負けのそれぞれが起きる確率が p, q であるとする. また, 引き分けが起きる確率を r とする. すなわち $r = 1 - (p + q)$ とする. ただし, $0 < p < 1, 0 < q < 1, p + q < 1$ であるとする. 勝ち, 負け, 引き分けが起きる回数をそれぞれ X, Y, Z とする. このとき,
(i) X の期待値 $E[X]$ および X の分散 $V[X]$ を求めよ.
(ii) X と Y の同時分布表を書け.
(iii) X と Y の共分散 $\text{Cov}(X, Y)$ を求めよ.
(iv) X と Y の相関係数 $\rho(X, Y)$ を求めよ.
(2) 母平均 μ , 母分散 σ^2 を持つ母集団から, 次の 10 個の無作為標本が得られた.

$$x = \{1, 1, 1, 4, 2, 4, 2, 5, 3, 7\}$$

以下の問いに答えよ.

- (i) x の中央値を求めよ.
(ii) x の標本平均を求めよ.
(iii) x の標本分散を求めよ.
(iv) x の不偏標本分散を求めよ.

[数理科学専攻 (専門科目)]

解答例

[1] (必須問題)

(1) 固有値を λ , 固有ベクトルを $x = {}^t(x \ y \ z) \neq 0$ とすると, $Ax = \lambda x$ より,
 $|A - \lambda E| = 0$. これより $\lambda = 2, 4, 4$.

i) $\lambda = 2$ のとき, $3x - z = 0, -x + y - z = 0$ より,

$$x = c_1 x_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

ii) $\lambda = 4$ (2 重解) のとき, $x - z = 0$ (y は任意の実数) より,

$$x = c_2 x_2 + c_3 x_3 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

したがって重複度と同じ個数の固有ベクトルが存在する.

以上 i) と ii) より, 固有ベクトルを順に列にならべて, $P = (x_1 \ x_2 \ x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

とすれば P は逆行列をもち, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ と対角化される.

(2) (i) 行基本変形より, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$. これがフル

ランクでないことが f が全射でないための必要十分条件だから, $a = -2$.

(ii) 行基本変形で先頭の 1 が残った列にあったベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = w_1, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = w_2$

を選べば, $\text{Im } f = \langle w_1, w_2 \rangle$. 一方, 核については行基本変形の結果から,

$$x + 2z = 0, y - z = 0. \text{ よって, } \text{Ker } f = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(iii) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 9 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = (g(w_1) \ g(w_2)) = (w_1 \ w_2) C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} C$ をみたす C が表現行

$$\text{列. よって, } C = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

〔2〕（必須問題）

(1) $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ と極座標変換を考えると, 閉領域

$$E = \left\{ (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

は閉領域

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \}$$

に写され $(E - \{(0, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\})$ で 1 対 1 に写される, $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = r$ である. よって,

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} dy dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \frac{r}{(1+r^2)^{\frac{3}{2}}} dr d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \left[-(1+r^2)^{-\frac{1}{2}} \right]_0^2 = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \end{aligned}$$

を得る.

(2) (i) $0 \leq x < 1$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ であるので, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ である.

また, $x = 1$ のとき, $x^n = 1, n \in \mathbb{N}$ であるので, $\{f_n(x)\}$ の極限関数 $f(x)$

は $f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x < 1) \\ \frac{1}{2} & (x = 1) \end{cases}$ である. 極限関数 $f(x)$ が $[0, 1]$ で連続でないので, $\{f_n(x)\}$ は区間 $[0, 1]$ 上で一様収束しない.

(ii) $f_n(x), n \in \mathbb{N}$ の増減を調べる.

$$f'_n(x) = n^{\frac{1}{4}} e^{-nx^2} - n^{\frac{1}{4}} x \cdot 2n x e^{-nx^2} = n^{\frac{1}{4}} e^{-nx^2} (1 - 2nx^2)$$

であるので, $x = \sqrt{\frac{1}{2n}}$ で最大値 $\sqrt{\frac{1}{2n}} n^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}}$ をとる. よって, $\{f_n(x)\}$ の極限関数 $f(x)$ は $f(x) = 0, x \in [0, 1]$ であり, $\{f_n(x)\}$ は区間 $[0, 1]$ 上で 0 に一様収束することがわかる.

〔3〕（代数）

(1) $(1\ 3), (3\ 5) \in G$ について, $(1\ 3)(3\ 5) = (1\ 3\ 5)$ と $(3\ 5)(1\ 3) = (1\ 5\ 3)$ は異なるので, アーベル群ではない.

(2) $\text{ord}(e) = 1, \text{ord}(\sigma_1) = \text{ord}(\sigma_2) = \text{ord}(\sigma_3) = 2$ であるから, order が $|H| = 4$ であるような元が存在しないため, H は巡回群ではない.

(3) $a = (1\ 2) \in S_5$ を考えると,

$$a^{-1} \sigma_1 a = (2\ 3)(4\ 5) \notin H$$

であるから, $a^{-1} H a = H$ が成り立たず, H は S_5 の正規部分群ではない.

(4) H の位数は 4 であるから, ラグランジュの定理より, H の部分群の位数は 4 の約数, すなわち, 1, 2, 4 のいずれかである.

部分群の位数が 1 または 4 のときは, 自明な部分群 $\{e\}, H$ である.

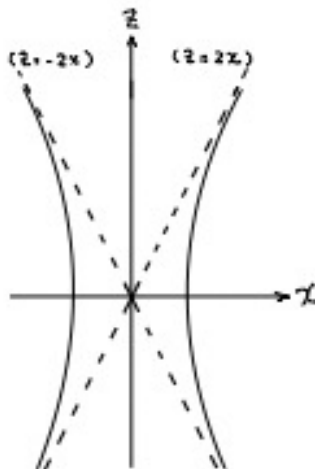
部分群の位数が2のときは, 2は素数なので巡回部分群であり, 位数が2の元で生成されるから, $\langle \sigma_1 \rangle = \{e, \sigma_1\}$, $\langle \sigma_2 \rangle = \{e, \sigma_2\}$, $\langle \sigma_3 \rangle = \{e, \sigma_3\}$ のいずれかである. 以上のことから, H の部分群は $\{e\}$, H , $\langle \sigma_1 \rangle = \{e, \sigma_1\}$, $\langle \sigma_2 \rangle = \{e, \sigma_2\}$, $\langle \sigma_3 \rangle = \{e, \sigma_3\}$ の5個である.

(5) G/H の元 $(1\ 3)H$, $(1\ 4)H$ について, $(1\ 3)H(1\ 4)H = (1\ 4\ 3)H$, $(1\ 4)H(1\ 3)H = (1\ 3\ 4)H$ であるが, $(1\ 3\ 4)^{-1}(1\ 4\ 3) = (1\ 3\ 4) \notin H$ であるから, $(1\ 4\ 3)H \neq (1\ 3\ 4)H$ である. ゆえに, G/H はアーベル群ではない.

〔4〕 (幾何)

(1) $x^2 + y^2 = (\cosh u \cos v)^2 + (\cosh u \sin v)^2 = \cosh^2 u$ より, $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = \cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ となるから, x, y, z の間に成り立つ関係式は $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$ である.

この関係式より, S と平面 $y = 0$ の交線の方程式は $x^2 - \frac{z^2}{4} = 1$ である. これは漸近線 $x \pm \frac{z}{2} = 0$ の双曲線であるので, 交線の概形を描くと次の図の実線のようになる.



$$(2) \mathbf{p}_u(u, v) = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u}(u, v) = \begin{pmatrix} \sinh u \cos v \\ \sinh u \sin v \\ 2 \cosh u \end{pmatrix}, \mathbf{p}_v(u, v) = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} -\cosh u \sin v \\ \cosh u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

より,

$$E = \left\langle \begin{pmatrix} \sinh u \cos v \\ \sinh u \sin v \\ 2 \cosh u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sinh u \cos v \\ \sinh u \sin v \\ 2 \cosh u \end{pmatrix} \right\rangle = \sinh^2 u + 4 \cosh^2 u$$

$$F = \left\langle \begin{pmatrix} \sinh u \cos v \\ \sinh u \sin v \\ 2 \cosh u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\cosh u \sin v \\ \cosh u \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$G = \left\langle \begin{pmatrix} -\cosh u \sin v \\ \cosh u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\cosh u \sin v \\ \cosh u \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \cosh^2 u$$

である .

(3) $\mathbf{p}_u(u, v)$ と $\mathbf{p}_v(u, v)$ のベクトル積とその長さを求めると ,

$$\mathbf{p}_u(u, v) \times \mathbf{p}_v(u, v) = \begin{pmatrix} -2 \cosh^2 u \cos v \\ -2 \cosh^2 u \sin v \\ \sinh u \cosh u \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{p}_u(u, v) \times \mathbf{p}_v(u, v)| = \cosh u \sqrt{4 \cosh^2 u + \sinh^2 u}$$

となる . したがって ,

$$\nu(u, v) = \frac{\mathbf{p}_u(u, v) \times \mathbf{p}_v(u, v)}{|\mathbf{p}_u(u, v) \times \mathbf{p}_v(u, v)|} = \frac{1}{\sqrt{4 \cosh^2 u + \sinh^2 u}} \begin{pmatrix} -2 \cosh u \cos v \\ -2 \cosh u \sin v \\ \sinh u \end{pmatrix}$$

である .

$$(4) \quad \mathbf{p}_{uu}(u, v) = \begin{pmatrix} \cosh u \cos v \\ \cosh u \sin v \\ 2 \sinh u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_{uv}(u, v) = \begin{pmatrix} -\sinh u \sin v \\ \sinh u \cos v \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{p}_{vv}(u, v) = \begin{pmatrix} -\cosh u \cos v \\ -\cosh u \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{より , 第二基本量 } L = \langle \mathbf{p}_{uu}, \nu \rangle, \quad M = \langle \mathbf{p}_{uv}, \nu \rangle,$$

$$N = \langle \mathbf{p}_{vv}, \nu \rangle \text{ はそれぞれ}$$

$$L = -\frac{2}{\sqrt{4 \cosh^2 u + \sinh^2 u}}, \quad M = 0, \quad N = \frac{2 \cosh^2 u}{\sqrt{4 \cosh^2 u + \sinh^2 u}}$$

となる . したがって ,

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{4}{(\sinh^2 u + 4 \cosh^2 u)^2}$$

である .

〔 5 〕 (解析)

- (1) 同次方程式 $y'' + 2y' + 3y = 0$ の特性方程式 $\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$ を解き, $\lambda = -1 \pm \sqrt{2}i$.
 よって同次方程式の解は, $y = e^{-x}(C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x)$.
 $y = a \cos 2x + b \sin 2x$ の形の特殊解を探す .

$$-4a \cos 2x - 4b \sin 2x - 4a \sin 2x + 4b \cos 2x + a \cos 2x + b \sin 2x = \sin 2x$$

より、係数比較から $-4a + 4b + 3a = 0$, $-4b - 4a + 3b = 1$.

よって $a = -\frac{4}{17}$, $b = -\frac{1}{17}$.

求める一般解は $y = e^{-x}(C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x) - \frac{1}{17}(4 \cos 2x + \sin 2x)$
(ただし C_1, C_2 は任意定数).

(2) $f(z) = \frac{ze^{i\pi z}}{z^2 + 2z + 5} = \frac{ze^{i\pi z}}{(z+1-2i)(z+1+2i)}$ とおき, 上半平面において閉曲線積分を行う. 上半平面にある極は $z_0 = -1 + 2i$ である.

$R > 0$ は十分大きいとする. $-R$ から R までの線分と円 $|z| = R$ の上半分をつなぎ構成する閉曲線を C_R とする. $K = \int_{C_R} f(z) dz$ は R によらず, $K = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ が成り立つ (半円に沿う積分評価は後に示す).

極 $z_0 = -1 + 2i$ における留数は

$$\begin{aligned} \text{Res}[f, z_0] &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{ze^{i\pi z}}{z^2 + 2z + 5} \\ &= \frac{(-1 + 2i)e^{(-1+2i)i\pi}}{2(-1 + 2i) + 2} = \frac{(-1 + 2i)e^{(-i\pi - 2\pi)}}{4i} \\ &= \frac{(1 - 2i)e^{-2\pi}}{4i} \end{aligned}$$

なので、コーシーの積分定理より

$$2\pi i \text{Res}[f, z_0] = \frac{\pi}{2}(1 - 2i)e^{-2\pi}$$

I, J はそれぞれ K の実部と虚部なので,

$$\begin{aligned} I &= \text{Re}\{2\pi i \text{Res}(f, z_0)\} = \frac{\pi}{2}e^{-2\pi}, \\ J &= \text{Im}\{2\pi i \text{Res}(f, z_0)\} = -\frac{\pi}{2}2e^{-2\pi} = -\pi e^{-2\pi} \end{aligned}$$

(半円に沿う積分評価) R が十分大きいとき, 関数 $f(z)$ の分母のオーダーを考えると $|z^2 + 2z + 5| \approx O(R^2)$. したがって, 分母の影響によって積分全体は $O(1/R^2)$ のオーダーで減少する. 次に分子のオーダーを考える. $|ze^{i\pi z}| = |z|e^{-\pi \text{Im}(z)}$. 上半円では $z = Re^{i\theta}$ とおくと, $\text{Im}(z) = R \sin \theta$ であり, $\theta = \frac{\pi}{2}$ で最大となる. よって $|e^{i\pi z}| \approx e^{-\pi R}$. このため分子の影響により積分全体は $O(Re^{-\pi R})$ のオーダーとなる.

分母の $O(R^2)$ と分子の $O(Re^{-\pi R})$ を組み合わせると $|f(z)| \approx \frac{O(Re^{-\pi R})}{O(R^2)} =$

$O\left(\frac{e^{-\pi R}}{R}\right)$ したがって、上半分の積分の寄与は

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq O\left(\frac{e^{-\pi R}}{R} R\right) = O(e^{-\pi R})$$

であり, $R \rightarrow \infty$ で 0 に収束する. すなわち 上半円の寄与は 0 に収束する.

〔 6 〕 （ 確 率 ・ 統 計 ）

- (1) (確 率) X は二項分布 $B(2, p)$ に従うので $E[X] = 2p$, $V[X] = 2p(1 - p)$ である .
 $r = 1 - (p + q)$ とすると , 同時分布表は

$X \backslash Y$	0	1	2
0	r^2	$2rq$	q^2
1	$2rp$	$2pq$	0
2	p^2	0	0

となる . Y は二項分布 $B(2, q)$ に従うので , 同様に $E[Y] = 2q$, $V[Y] = 2q(1 - q)$ である . 分布表より $E[XY] = 2pq$, 従って $Cov(X, Y) = 2pq - 2p2q = -2pq$ を得る . よって

$$\rho(X, Y) = \frac{-2pq}{\sqrt{2p(1-p)2q(1-q)}} = -\sqrt{\frac{pq}{(1-p)(1-q)}}$$

である .

- (2) (統 計)

- (i) x を昇順に並べると

$$\{1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 7\}$$

したがって, 中央値は

$$\frac{2+3}{2} = \mathbf{2.50}$$

- (ii) x の標本平均は

$$\bar{x} = \frac{1+1+1+4+2+4+2+5+3+7}{10} = \mathbf{3.00}$$

- (iii) x^2 の標本平均は

$$\bar{x}^2 = \frac{1+1+1+16+4+16+4+25+9+49}{10} = 12.60$$

したがって, x の標本分散 s^2 は

$$s^2 = \bar{x}^2 - \{\bar{x}\}^2 = 12.60 - 9.00 = \mathbf{3.60}$$

- (iv) x の不偏標本分散 u^2 は

$$\begin{aligned} u^2 &= \frac{(1-3)^2 + (1-3)^2 + (1-3)^2 + (4-3)^2 + (2-3)^2}{9} \\ &\quad + \frac{(4-3)^2 + (2-3)^2 + (5-3)^2 + (3-3)^2 + (7-3)^2}{9} \\ &= \mathbf{4.00} \end{aligned}$$

[数理科学専攻 (専門科目)]

出題意図

- 〔 1 〕 (必須問題) 線形代数学の基礎知識, 特に線形空間論の基本を理解しているかをみる .
行基本変形と連立方程式の解法, 固有値・固有ベクトル, 固有空間, 行列の対角化, 核空間と像空間, 線形空間の次元, 表現行列を求める手法を習得しているかをみる .
- 〔 2 〕 (必須問題) 重積分計算の運用力および関数列の収束の判定力をみる .
- 〔 3 〕 (代数) 対称群を題材とし, 群論における基本的概念である, アーベル群, 巡回群, 正規部分群, 部分群の列挙, 剰余群について理解しているかをみる .
- 〔 4 〕 (幾何) 空間内の曲面に関する基本事項, 特に概形の調べ方や曲面の基本的な微分幾何学的量のあつかいを理解し習得しているかどうかをみる .
- 〔 5 〕 (解析) 非同次 2 階微分方程式の解法を理解とその運用力をみる . 複素解析を用いた実積分の評価と留数定理や積分経路の選択の運用力をみる .
- 〔 6 〕 (確率・統計)
- (1) (確率) 確率論の基本が理解できているかをみる . 各小問において具体的に以下の点についてみる .
 - (i) 確率変数の期待値と分散を理解しているか .
 - (ii) 2 変数の確率変数の同時分布の概念を理解し, 計算できるか .
 - (iii) 2 変数の確率変数の共分散の概念を理解し, 計算できるか .
 - (iv) 2 変数の確率変数の相関係数の概念を理解し, 計算できるか .
 - (2) (統計) 統計学の基本が理解できているかをみる . 各小問において具体的に以下の点についてみる .
 - (i) データの分布における中心傾向を示す指標の一つである中央値が正しく理解できているか .
 - (ii) 母集団から抽出した標本の平均値である標本平均を与えられたデータから計算できるか .
 - (iii) 同じく母集団から抽出した標本の分散である標本分散を与えられたデータから計算できるか .
 - (iv) その期待値が母分散と一致する性質 (不偏性) を持つ不偏標本分散が偏差平方和を $n - 1$ で割ることにより得られることを理解しているか .