

理系数学（2月1日）

1. 出題意図

大問[1] は独立した小問の集合で比較的易しい. 大問[2], [3], [4] は小問に分けて丁寧に誘導し, 特別なアイデアを自力で思いつかなくても解けるように作っている. うまく誘導に乗れば見かけほど難しくないはずである.

入学後の授業についていけるだけの基礎知識があるかを調べるため題材を慎重に選んでいる.

2. 解答（解答例）

[1]

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
(d) 2046	(h) $n \cdot 2^n - 2^n + 1$	(b) $-2t^2 + t + 1$	(f) $\frac{7}{6}\pi < x < \frac{11}{6}\pi$	(b) 2	(e) 5	(c) 7	(f) $-\frac{2}{5}$

[2]

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
$5 - 2x^2$	$x(2x^2 - 15)$	$\frac{\sqrt{10}}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-3x + 8$	$-\frac{1}{3}(5 - x^2)^{\frac{3}{2}}$	$\frac{31 - 5\sqrt{5}}{3}$	$\frac{736}{15}\pi$

[3]

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
126	20	40	$\frac{10}{21}$	$\frac{2}{63}$	$\frac{121}{126}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{26}{63}$

[4]

(1) $f(4) = 2 \cdot 1^2 \cdot \log_2 4 - 12 \cdot \log_2 4 = 2 \cdot 2 - 12 \cdot 2 = \boxed{-20}$.

(2) $\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{t}{2}$, $\log_2 \frac{x^4}{64} = 4 \log_2 x - \log_2 64 = 4t - 6$ であるから,

$$f(x) = 2 \left(\frac{t}{2} \right)^2 (4t - 6) - 12t = \boxed{2t^3 - 3t^2 - 12t}.$$

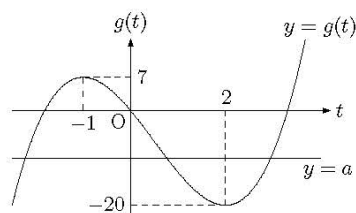
また, $\log_2 x$ は x に関して単調増加であるから, $\log_2 \sqrt{2} \leq \log_2 x \leq \log_2 2\sqrt{2}$. したがって, $\boxed{\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{2}}$.

$g(t) = 2t^3 - 3t^2 - 12t$ とおく. $g'(t) = 6(t+1)(t-2)$ であるから, $-1 \leq t \leq 2$ で $g(t)$ は単調減少である. したがって, いま考えている範囲 $\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{2}$ においても $g(t)$ は単調減少であり, また, $t = \log_2 x$ は x に関して単調増加であるから, $f(x)$ は $\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}$ において単調減少である. ゆえに, $f(x)$ は $x = \sqrt{2}$ のとき, 最大値 $f(\sqrt{2}) = g\left(\frac{1}{2}\right) = \boxed{-\frac{13}{2}}$ をとる.

(3) t の 3 次関数 $g(t)$ の増減表とグラフ (縦軸は簡単のため縮小した)

は次のとおり ($y = a$ のグラフも描き込んだ).

t	...	-1	...	2	...
$g'(t)$	+	0	-	0	+
$g(t)$		↗	7	↘	-20



極大値 $g(-1) = 7$, 極小値 $g(2) = -20$. したがって, 求める a の値は $a = \boxed{7, -20}$. これより, 最大の a

の値は $a = 7$ であり, $g(t) = 7$ の解は, $g(t) - 7 = (t+1)^2(2t-7) = 0$ より, $t = -1, \frac{7}{2}$. したがって,

$f(x) = 7$ の解は $x = \boxed{\frac{1}{2}, 8\sqrt{2}}$ であることが分かる.