理系数学 (2月1日)

1. 出題意図

大問[1] は独立した小問の集合で比較的易しい. 大問[2], [3], [4] は小問に分けて丁寧に誘導し, 特別なアイデアを自力で思いつかなくても解けるように作っている. うまく誘導に乗れば見かけほど難しくはないはずである.

入学後の授業についていけるだけの基礎知識があるかを調べるため題材を慎重に選んでいる.

2. 解答 (解答例)

[1]

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
$\frac{3}{55}$	$X^2 + 2X - 8 - \frac{16}{X}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{2}$	$3i$	2

[2]

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
$\frac{5}{6}$	307	3	$\frac{m}{2}$	$\frac{m(m+1)}{4}$	90	$\frac{5}{4}$	22

[3]

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
2	4	8	$\sin 2x + x$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{8}{3}\sin^3 x + 4\sin x$	$\frac{4}{3}(\sqrt{2}-1)$

[4]

[解答例]

(1) $|\vec{AB}| = 5$, $|\vec{AB}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 = 16 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 4$ より $\vec{a} \cdot \vec{b} = \boxed{-\frac{5}{2}}$. また, $\vec{OD} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$ であるから $|4\vec{OD}|^2 = |3\vec{a} + \vec{b}|^2 = 9|\vec{a}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 9 \cdot 4 - 15 + 16 = 37$. よって $|\vec{OD}| = \boxed{\frac{\sqrt{37}}{4}}$.

(2) 実数 k を用いて $\vec{OH} = k\vec{OD}$ と表せる. このとき $\vec{AH} = \vec{OH} - \vec{a} = k\vec{OD} - \vec{a} = k\left(\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}\right) - \vec{a} = \frac{1}{4}(3k - 4)\vec{a} + \frac{1}{4}k\vec{b}$. よって $0 = 4\vec{AH} \cdot 4\vec{OD} = \{(3k - 4)\vec{a} + k\vec{b}\} \cdot (3\vec{a} + \vec{b}) = (9k - 12)|\vec{a}|^2 + (6k - 4)\vec{a} \cdot \vec{b} + k|\vec{b}|^2 = 37k - 38$ より $k = \frac{38}{37}$. よって $\vec{OH} = k\vec{OD} = \frac{38}{37}\left(\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}\right) = \boxed{\frac{57}{74}\vec{a} + \frac{19}{74}\vec{b}}$.

(3) $\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{a} = t\vec{OD} - \vec{a} = \boxed{\frac{1}{4}(3t - 4)\vec{a} + \frac{1}{4}t\vec{b}}$.

(4) $\vec{BP} = \frac{3}{4}t\vec{a} + \frac{1}{4}(t - 4)\vec{b}$ であるから, $4\vec{AP} \cdot 4\vec{BP} = \{(3t - 4)\vec{a} + t\vec{b}\} \cdot \{3t\vec{a} + (t - 4)\vec{b}\} = 3t(3t - 4)|\vec{a}|^2 + (6t^2 - 16t + 16)\vec{a} \cdot \vec{b} + t(t - 4)|\vec{b}|^2 = 37t^2 - 72t - 40 = 37\left(t - \frac{36}{37}\right)^2 - \frac{2776}{37}$. よって $t = \boxed{\frac{36}{37}}$ のとき, $\vec{AP} \cdot \vec{BP}$ は最小値をとる. このとき $\vec{OH} = \frac{38}{37}\vec{OD}$, $\vec{OP} = \frac{36}{37}\vec{OD}$ であるから, $PH = |\vec{OH} - \vec{OP}| = \left(\frac{38}{37} - \frac{36}{37}\right)|\vec{OD}| = \frac{2}{37} \cdot \frac{\sqrt{37}}{4} = \boxed{\frac{\sqrt{37}}{74}}$.