

文系数学（2月1日）

1. 出題意図

出題においては、(1)基本事項の十分な理解とそれを運用する力、(2)問題を理解し解決に至る道筋を構想する力、(3)問題を実際に解決する計算力、の3つを見ることを目標にしている。

実際の問題形式は、大問3問のうち、大問[1]、[2]は空欄補充の問題で、数学I、数学II、数学A、数学B、数学C（「ベクトル」）の内容を問い、大問[3]は微分積分の記述問題を小問に分けて、誘導して解く問題としている。どの問題も適宜誘導をつけて取り組みやすいよう配慮しており、出題分野についても偏りないようにしている。

2. 解答（解答例）

[1]

(ア)	(イ)	(ウ)	(エ)	(オ)	(カ)	(キ)
5	4	$\frac{16\sqrt{6}}{5}$	1	$\frac{9}{64}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{15}{256}$

[2]

(ア)	(イ)	(ウ)	(エ)	(オ)	(カ)	(キ)
$\frac{3}{2}$	$0 < a < 4$	$\alpha + \beta < 1$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$

[3]

[解答] (1) $y' = 6x^2 - 4$ であるから, $x=1$ のとき, $y' = 2$ である. よって, 直線 ℓ の方程式は, $y = 2(x-1)$ である. 曲線 C と直線 ℓ の共有点の x 座標は $2x^3 - 4x + 2 = 2x - 2$, すなわち $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2) = 0$ の $x=1$ 以外の解である. よって, $a = -2$ である.

(2) 点 $(b, 2b^3 - 4b + 2)$ における接線 m の方程式は $y = (6b^2 - 4)(x - b) + 2b^3 - 4b + 2$ である. これが点 $(1, 0)$ を通るから, $0 = (6b^2 - 4)(1 - b) + 2b^3 - 4b + 2$ が成り立つ. すなわち, b は $2b^3 - 3b^2 + 1 = (b-1)^2(2b+1) = 0$ の 1 以外の解であるから $b = -\frac{1}{2}$ である.

(3) 曲線 C と直線 ℓ で囲まれた部分の面積は,

$$\begin{aligned} \int_{-2}^1 \{2x^3 - 4x + 2 - (2x - 2)\} dx &= \left[\frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 4x \right]_{-2}^1 \\ &= \frac{1}{2}(1 - 16) - 3(1 - 4) + 4(1 + 2) = -\frac{15}{2} + 9 + 12 = \frac{27}{2} \end{aligned}$$

である.

(4) $x = -\frac{1}{2}$ のときの ℓ 上の点の y 座標は, $2\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 = -3$ である. 面積を求める部分は, 下図の斜線部分である. それを直線 $x = -\frac{1}{2}$ で分けて考えると, 求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} \{2x^3 - 4x + 2 - (2x - 2)\} dx + \frac{1}{2} \left(\frac{15}{4} + 3 \right) \left(1 + \frac{1}{2} \right) \\ &= \left[\frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 4x \right]_{-2}^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{4} \left(\frac{15}{4} + 3 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{16} - 16 \right) - 3 \left(\frac{1}{4} - 4 \right) + 4 \cdot \frac{3}{2} + \frac{45}{16} + \frac{9}{4} \\ &= \frac{1}{32} - 8 - \frac{3}{4} + 12 + 6 + \frac{45}{16} + \frac{9}{4} = \frac{459}{32} \end{aligned}$$

である.

別解: $m: y = -\frac{5}{2}x + \frac{5}{2}$ である. m と C で囲まれる部分の面積は

$$\int_{-1/2}^1 \left\{ \left(-\frac{5}{2}x + \frac{5}{2} \right) - (2x^3 - 4x + 2) \right\} dx = \frac{27}{32}$$

である. したがって, (3) の結果と併せ,

$$T = \frac{27}{2} + \frac{27}{32} = \frac{459}{32}$$

である.

