報告用紙②

関西学院大学　研究成果報告

２０２２年３月１６日

関西学院大学 学長殿

所属：理工学研究科
職名：博士研究員
氏名：朴　佳南

以下のとおり、報告いたします。

研究制度	□特別研究期間　□自由研究期間 □大学共同研究　□個人特別研究費 ☒博士研究員 ※国際共同研究交通費補助については別様式にて作成してください。
研究課題	超幾何関数の拡張を解に持つモノドロミー保存変形の諸性質
研究実施場所	理工学研究科
研究期間	２０２１年４月１日　～２０２２年３月３１日（１２ヶ月）

◆ **研究成果概要**　(2,500字程度)
上記研究課題に即して実施したことを具体的に記述してください。

パンルヴェ方程式は、２階非線形常微分方程式で、超幾何関数で表される特殊解を持つことが知られている。２１世紀に入り、パンルヴェ方程式の拡張の研究が大きく進展している。１つの拡張は差分化であり、もう１つの拡張は高次元化である。

本研究課題で扱う方程式系は、自身が導入した、パンルヴェ方程式のq差分化かつ高次元化した方程式系（MN系と呼称）である。MN系は、q超幾何関数の拡張で表される特殊解を持つ[1]。離散を含む２次元パンルヴェ方程式は、Sakaiにより拡大アフィンワイル群に関連した有理曲面の型を基準に分類がな

されている[2]

$$
\begin{array}{llllllllllllllllll}
\text{ell.} & E_8^{(1)} & & & & & & & & & & & & & & A_1^{(1)} & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & \nearrow & & & \\
\text{mul.} & E_8^{(1)} & \to & E_7^{(1)} & \to & E_6^{(1)} & \to & D_5^{(1)} & \to & A_4^{(1)} & \to & A_{2+1}^{(1)} & \to & A_{1+1}^{(1)} & \to & A_1^{(1)} & \to & A_0^{(1)} \\
\text{add.} & E_8^{(1)} & \to & E_7^{(1)} & \to & E_6^{(1)} & & \to & & D_4^{(1)} & \to & A_3^{(1)} & \to & A_{1+1}^{(1)} & \to & A_1^{(1)} & \to & A_0^{(1)} \\
 & & & & & & & & & & & & \searrow & & \searrow & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & A_2^{(1)} & \to & A_1^{(1)} & \to & A_0^{(1)}
\end{array}
$$

上図はその分類を表す。それらは、楕円差分、q差分、加法的差分の３種類がある。４次元の場合には、微分の場合とは異なり、離散の場合の分類理論が得られていない。MN系は、高次元の離散パンルヴェ方程式系であるが、MN系が低い次元の方程式系を与える場合かつ既知の方程式系を含まない場合がある。分類のためにも、未知の４次元以上の離散パンルヴェ方程式があるならば発見し、その性質を調べる必要がある。手始めに、MN系が２次元の方程式系を与える場合について、それがどのような対称性を持つ方程式系であるのかを考察した。

本研究の目的は、MN系の諸性質、特に対称性や幾何的な特徴付けを明らかにすることである。MN系が２次元の方程式系を与える場合にどのような方程式系が導出されるのかを調べたので、以下に報告する。

MN系が２次元の方程式系を与え、パンルヴェ第６方程式のq類似（q-P_{VI}と呼称）[3]でない場合として、(M,N)=(3,3)の場合について調べた。このとき、変形される方程式は３次正方行列を係数に持つ１階線形q差分方程式である。この３次の行列係数を持つ線形方程式に対して、２つの変形を取った。１つは標準的な$E_6^{(1)}$型qパンルヴェ方程式が得られる変形であり、もう１つは[1]において扱った変形である。前者は、変形される方程式の特性指数が、原点において２つ、無限遠点において２つqシフトされる変形である。後者は、行列因子の入れ替えに相当する変形である。この$E_6^{(1)}$型qパンルヴェ方程式に関する３次行列係数を持つ１階線形方程式から、未知関数ベクトルにおける３つの関数のうち２つの関数について解くことにより、３階線形q差分方程式が得られた。得

られた線形方程式を、２つの観点から方程式の持つ特徴を見出した。１つは独立変数と未知関数の方程式と見る。もう１つは見かけの特異点uと、それに基づいて定義した変数vの方程式と見る。見出された特徴から、方程式が復元されることも確認した。

自身が導入した、非線形q差分方程式系であるMN系が２次元の場合かつ$q\text{-}P_{VI}$以外の場合に、Sakaiによる２次元パンルヴェ方程式の対称性に関する分類[2]におけるどのような対称性を持つ方程式系であるのかを考察した。結果として、$E_6^{(1)}$型qパンルヴェ方程式の３次行列型ラックス形式・３階スカラー・ラックス形式を得た。$E_6^{(1)}$型qパンルヴェ方程式のラックス形式として知られているのは、２次行列型ラックス形式([4][5])と、２階スカラー・ラックス形式[6]である。これらより高い次数・階数のものは、調べた限り見当たらなかった。したがって、$E_6^{(1)}$型qパンルヴェ方程式の新しいラックス形式が得られたと考える。

以上の結果より、MN系が２次元の場合かつ$q\text{-}P_{VI}$以外の場合に、$E_6^{(1)}$型qパンルヴェ方程式の３次行列型ラックス形式・３階スカラー・ラックス形式を得た。今後は、この方程式へのアフィンワイル群作用と特殊解などの考察、さらにMN系が４次元の方程式系を与える場合について考察したい。

以上で報告した結果については現在論文作成中である。上記期間において、以下の研究集会で成果を報告した。

口頭発表

朴佳南，「$E_6^{(1)}$型qパンルヴェ方程式のラックス形式」,函数方程式論サマーセミナー，Zoomを用いたオンライン開催,2021年8月12日,(国内)(一般)(日本語)

招待講演

朴佳南，「$E_6^{(1)}$型qパンルヴェ方程式のラックス形式」,RIMS共同研究（公開型）「可積分系数理の諸相」，Zoomを用いたオンライン開催,2021年8月27日,(国

内)(招待)(日本語)

学会発表

朴佳南，「$E_6^{(1)}$型qパンルヴェ方程式のラックス形式」，日本数学会2021年度秋季総合分科会，Zoomを用いたオンライン開催，2021年9月14日，(国内)(一般)(日本語)

【参考文献】[1] Park, K., arXiv:2005.04992, in press.

[2] Sakai, H., Commun. Math. Phys., 220, (2001), 165-229

[3] Jimbo, M. and Sakai, H. Lett. Math. Phys., 38, (1996), 145-154.

[4] Sakai, H., J. Phys. A: Math. Gen. 39, (2006), 12203-12210.

[5] Witte. N. S. and Ormerod, C. M., SIGMA, 8, (2012), 097.

[6] Yamada, Y., Int. Math. Res. Notices, 17, (2011), 3823-3838.

報告用紙②

以　上

提出期限：研究期間終了後2ヶ月以内

※個人特別研究費：研究費支給年度終了後2ヶ月以内　博士研究員：期間終了まで

提出先：研究推進社会連携機構（NUC）

※特別研究期間、自由研究期間の報告は所属長、博士研究員は研究科委員長を経て提出してください。

◆研究成果概要は、大学ホームページにて公開します。研究遂行上大学ホームページでの公開に支障がある場合は研究推進社会連携機構までご連絡ください。