２０１５年度　博士研究員研究成果報告書

氏名（所属研究室）　反田　美香（理工学研究科山根研究室）

研　　究　　課　　題　The relation between the hypergeometric function with a large parameter and WKB solutions

研　　究　　期　　間　２０１５年７月１日～２０１６年３月３１日

研 究 成 果 概 要（**日本文（全角）の場合は2,500字程度、英文（半角）の場合は90字×65行程度）**

今年度の研究成果はGaussの超幾何微分方程式の解である超幾何関数とWKB解との関係を付けたことである．また，Gaussの超幾何微分方程式に合流操作を施し得られるKummerの方程式の解とWKB解の関係についても結果を得られた．以下で述べる結果は２階のGauss微分方程式およびKummerの方程式の１階項をそれぞれ消去し,大きなパラメータを導入した一般の場合である．この結果は近畿大学の青木教授，高橋氏との共同研究である．

まずGaussの超幾何微分方程式の解である超幾何関数とWKB解の関係について研究を行った． Gaussの超幾何微分方程式をWKB解析の基で考察する時,Stokesグラフを描くことが可能である．Stokesグラフとは Stokes曲線と呼ばれる曲線と特異点(0,1,∞の３点)，変わり点から得られるグラフである．ここで変わり点とは微分方程式の定数項の主要部であるポテンシャルの 1 位の零点である．また，Stokes曲線で囲まれた領域を Stokes領域と呼ぶ．一般的に２階の微分方程式の変わり点は２存在する.この２つの変わり点を結ぶ Stokes曲線や１つの変わり点から Stokes曲線が出，同じ変わり点に帰ってくるループと呼ばれる曲線が存在する時Stokesグラフは退化するという．非退化の Stokes グラフはパラメータによる分類を行うことができ，Gauss の超幾何の場合４種に分類できることの証明を過去に行った．また，超幾何関数と WKB解の関係を考察する時に必要であるVoros係数を各特異点で定義し，具体的な表示も過去に求めていた．Voros係数とは，変わり点と呼ばれる点で規格化したWKB解と特異点で規格化したWKB解の比の対数である.これらを基に今年度はVoros係数のBorel和を考察した.Voros係数の Borel和は非退化Stokes幾何ごとに関数として異なるものが得られるため，非退化Stokes幾何ごとの相互関係を明らかにすることに成功した．さらに，この相互関係を利用し，WKB 解のパラメータに関するStokes現象を考察し結果を得た.Voros係数やその Borel 和およびWKB解のパラメータに関する Stokes 現象については各特異点の特性指数の差が大きなパラメータに比例するように大きなパラメータを導入した特殊な場合は過去に自身が研究を行い，結果を得ている．今回は一般を考察する為、パラメータが多く（特殊な場合は大きなパラメータを含め４つ、一般は７つ）特殊な場合のVoros係数の計算では大変かつVoros係数のBorel和の結果にはべき関数およびガンマ関数が現れる．その為，Voros係数を改めて定義し、Voros係数およびその Borel和の計算を行った．改めて定義したVoros係数のBorel和はべき関数は現れないリーズナブルな式となった.

このVoros 係数のBorel 和を利用する前にまず，超幾何関数と特異点の１つである原点で規格化したWKB解のBorel和を非退化ごとに関係をつけた．この関係は４種に分類された非退化のStokesグラフごとに結果を得た．原点で規格化したWKB解はStokes曲線上で recessive と dominant の２種の解が一般的に存在する．Stokes曲線上で recessive な解はその Stokes 曲線上で Stokes現象を起こさない事が知られている．その為，その Stokes 曲線上では Borel 総和

可能である．また，Stokes 領域内では recessive，dominant どちらの解も Borel 総和可能であることが小池，Sheafke 氏により証明されている．この事実を利用することにより原点に流れ込む Stokes 曲線上で WKB 解が recessive であるように分枝をとってやれば原点の近傍で,原点に流れ込む WKB 解の Borel 和を得る事ができる．また，原点で規格化した WKB 解の Borel 和にあるべき関数を掛けたものは原点で正則な超幾何関数である．さらに超幾何関数は原点で正則である事は古くから知られている．これより原点で規格化した WKB 解の Borel 和と超幾何関数は定数倍の関係式を得る．正則な解は 1 次元の部分空間である為，2 つの解の関係の間に現れる定数は原点の近傍で計算することが可能である．これより原点で規格化した WKB 解の Borel 和と超幾何関数の関係を得ることができた.

次に上記で述べた Voros 係数の Borel 和を利用して変わり点で規格化した WKB 解の Borel 和と超幾何関数の関係を得た．上記で述べたように Voros 係数の Borel 和はガンマ関数が現れる為，変わり点で規格化した WKB 解と超幾何関数の関係にはガンマ関数が現れる興味深いものとなった. Watson の Lemma より変わり点で規格化した WKB 解の Borel 和はその WKB 解を漸近展開に持つことがわかる.そのため WKB 解と超幾何関数の関係を原点の近傍で得ることに成功した.

この計算方法を基に Gauss の超幾何微分方程式に合流操作を施して得られる Kummer の微分方程式についても研究を行った．まずは実際に Gauss の超幾何微分方程式に合流操作を行うことにより Kummer の解と WKB 解の関係が得られるか調べる為に Kummer の場合も同様 Voros 係数およびその Borel 和を計算し具体系を得た．この結果はブランチを Gauss の超幾何微分方程式にあわせて取ってやれば自身の結果である Gauss の微分方程式の Voros 係数およびその Borel 和に合流操作を施したものと一致した.さらに Kummer の解と WKB 解の関係についても計算を行なった.

上記については現在論文作成中であり在籍中に掲載決定となった論文は Gauuss の超幾何微分方程式における WKB 解がある領域で Borel 総和可能かどうかを記述したものである.

また，在籍中に行った出張先で自身の結果と北海道大学の岩崎教授，蛭子氏の結果には関係があるのではないかという新たな研究材料を発見することができた．さらに p 超幾何や高階である 3F2 と WKB 解の関係はつくかという他の方程式についても在籍中にアドバイスをいただいた為，今後の研究に繋がる研究材料を得た.

この他にも以前から興味がった粒子の交通流への応用もこの自身の結果を利用すれば結果を得ることができるのではないかと考えている. このように Gauss の超幾何微分方程式の解である超幾何関数と WKB 解の関係を得る事が出来た為今後の研究に繋がる研究題材も得ることができた.

発表論文（予定を含む）

Aoki,T. Takahashi, M. and Tada, M., The hypergeometric function and WKB solutions, to appear in RIMS Kôkyûroku Bessatsu

学会発表

1. 反田 美香, (口頭発表;国内学会), 超幾何関数と WKB 解の関係について, 2015 年函数方程式論サマーセミナー, 神奈川県 箱根，2015 年 8 月 5 日～8 日

2. 反田 美香, (口頭発表;国際学会), The relation between the hypergeometric function with a large parameter and WKB solutions, International Conference on Partial Differential Equations, Philippine Cebu, 2016 年 1 月 10 日～16 日
3. 反田 美香, (口頭発表;国内学会;招待講演), The hypergeometric function and WKB solutions, 複素領域の微分方程式、漸近解析とその周辺, 広島県 広島大学, 2016 年 3 月 7 日～9 日
4. 青木貴史, 高橋甫宗, 反田美香(口頭発表;国内学会), The Voros coefficients of the Gauss hypergeometric differential equation with a large parameter, 日本数学会年会, 茨城県筑波大学, 2016 年 3 月 16 日～18 日
5. 反田 美香, (口頭発表;国内学会), TBA, アクセサリー・パラメーター研究会, 熊本県 熊本大学, 2016 年 3 月 22 日～24 日

賞　　　罰

山田晴河賞 受賞　2015 年